

MINISTERIO DE DEFENSA NACIONAL
SUBSECRETARÍA DE AVIACIÓN

SERVICIO METEOROLÓGICO ESPAÑOL

Serie A, núm. 10.

La turbulencia dinámica de la atmósfera en Barcelona

POR EL

METEORÓLOGO MARIANO DOPORTO

Doctor en Ciencias Físicas
Director del Observatorio de Igueldo

BARCELONA

C. O. «Avant», Cortes Catalanas, 719

1938

460.235
ELONA)
DP
10

AEMET-BIBLIOTECA



1001514

© Agencia Estatal de Meteorología. 2018

12.º 13.886

Sig. M. 6 (460.235
BARCELONA)

LA TURBULENCIA DINÁMICA
DE LA ATMÓSFERA EN BARCELONA

por
M. DOPORTO



LA TURBULENCIA DINÁMICA DE LA ATMÓSFERA EN BARCELONA, *por* M. DOPORTO

ABSTRACT.

The object of this paper is to study the variation of the wind with respect to the altitude due to the macroturbulence produced by the obstacles of the ground in all the stratum perturbed by the eddies, and its relation to the vertical gradient of temperature. The eddies which are engendered between the ground, $z = 0$, and H , i. e. the altitude at which the gradient wind is observed, travel through the turbulent stratum in all directions. As it is admitted that the medium energy of the eddies diminishes on increasing the height, the eddies which are engendered near the ground can arrive at the level $z = H$, whilst those produced in a stratum of the thickness $A < H$ are the only ones which arrive on the ground itself. H is the maximum upward course, and A is the maximum downward course of the eddies. On the ground of this hypothesis, and admitting a linear variation of A with z , the following equations are obtained:

$$\left. \begin{aligned} u &= u_s + \frac{u_\gamma - u_s}{P} \log (1 + Qz) \\ v &= \frac{v_\gamma}{P_1} \log (1 + Q_1 z) \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

in which: u_γ and v_γ , are the components of the gradient wind; u_s is the superficial wind; and P , P_1 , Q and Q_1 are constants, such as: $P = \log. (1 + QH)$, $P_1 = \log. (1 + Q_1H)$. In the case $P = P_1$, the projection of the perfil of the velocity on the plane XY , is a straight line; in the other case it is a logarithmical spiral. The tangential force of resistance is $F_{x0} = \Omega \rho v_\gamma \frac{Q_1 H - P_1}{P_1 Q_1}$; $F_{y0} = \Omega \rho (u_s - u_\gamma) \frac{QH - P}{PQ}$; and the coefficients of turbulence are expressed by: $K_{x0} = \Omega \frac{QH - P}{Q^2}$; $K_{y0} = \Omega \frac{Q_1 H - P_1}{Q_1^2}$ signifying: ρ , the density of the air, and $\Omega = \omega^2 \sin \varphi$.

the Coriolis acceleration. By the method of dimensions the tangential force is deducted: $F = K^2 \rho \theta^2 f \left(\frac{V}{K\theta} \right)$ in which f represents a potential function of the number $\frac{V}{K\theta}$ which in the atmosphere plays an equal role to the one played by the Reynolds number in hydrodynamics, and θ is the lapse rate of potential temperature. With 171 soundings which have been made at Barcelona by the Servei Meteorològic de Catalunya with pilot balloons, a satisfactory accord with (i) is made, which are to be considered not valid for the isothermal atmospheres. It is obtained for F an expression in which the vertical gradient of temperature enters as a variable; this expression is analogue to the Poiseuille's one for the laminar fluid in liquids. Also values of H , A and K are obtained for different lapse rates.

1. Sea una masa de aire con un gradiente de presión uniforme respecto a x e y (coordenadas horizontales en giro *contra solem*) y cuya dirección sea independiente de z (altura sobre la superficie de nivel cero o sobre el nivel del mar). Las ecuaciones del movimiento, en dos dimensiones ($w = 0$), habida cuenta de la rotación de la Tierra, supuesta su superficie real deslizando sin rozamiento sobre la superficie de nivel cero, son:

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{du}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \Omega \rho v \\ \rho \frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} - \Omega \rho u \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

o en forma vectorial:

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\text{grad. } p - \Omega \rho i \mathbf{V}, \quad (1')$$

donde son: $\Omega = 2\omega \sin \varphi$ (ω , velocidad angular de la Tierra; φ , latitud); ρ , la densidad; $\mathbf{V} = u + iv$, la velocidad del viento; y p , la presión.

Cuando el régimen es estacionario, se obtiene:

$$\mathbf{V}_\gamma = \frac{1}{\Omega \rho} i \text{ grad. } p \quad (2)$$

es decir:

$$\left. \begin{aligned} u_\gamma &= -\frac{1}{\Omega \rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ v_\gamma &= \frac{1}{\Omega \rho} \frac{\partial p}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (2')$$

que son la velocidad \mathbf{V}_γ o las componentes u_γ y v_γ de la velocidad del viento llamado geostrófico, el cual, en el caso de isobaras rectilíneas paralelas, único considerado, es igual al viento del gradiente.

Prescindiendo de las pequeñas variaciones de ρ , el viento del gradiente no varía con la altura; las líneas de flujo son rectas paralelas, situadas sobre las superficies de nivel, confundida con sus planos tangentes en las cercanías del lugar en que se estudia el movimiento, y el aire de las capas inferiores queda ocluido entre las rugosidades del terreno (movimiento laminar, figura 1).

Si se supone que, en un instante dado, cesa el movimiento relativo de la superficie real del terreno respecto a la superficie de nivel cero, de momento, en las capas altas, la velocidad del aire no varía; pero, en las inferiores, donde las líneas del flujo laminar son cortadas por las desigualdades del terreno, se engendran fuerzas de resistencia del tipo $ap/(v)$ y desplazamientos laterales y verticales de masas; es decir, el movimiento laminar se convierte en un movimiento turbillonario. Los remolinos, independientemente del movimiento general de la masa de aire,

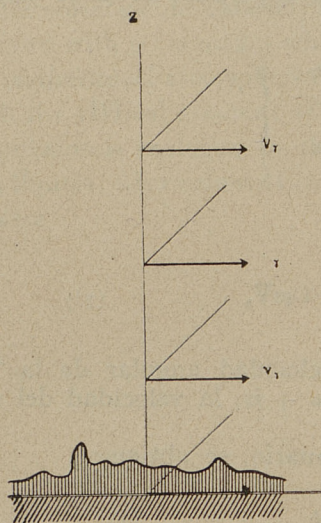


Figura 1.

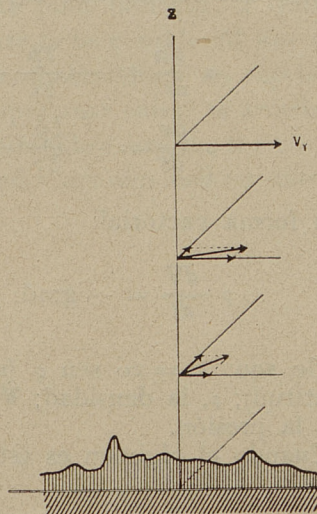


Figura 2.

propagan de capa a capa, hacia arriba, el movimiento turbillonario, y al cabo de un cierto tiempo se logra un estado permanente de movimiento en cuanto al valor medio, extendido a un intervalo de tiempo y área convenientes, de la velocidad \mathbf{V} : un estado de equilibrio dinámico, dando a esta expresión significado análogo al que se le atribuye en la teoría cinética de gases.

Por razones de simetría, si las irregularidades de la superficie están uniformemente repartidas alrededor del lugar, \mathbf{V} es sólo función de z . En un instante t , la velocidad actual \mathbf{V}_t es:

$$\mathbf{V}_t = \mathbf{V} + \mathbf{V}_r$$

donde \mathbf{V}_r es el viento debido a los remolinos. Además se tiene:

$$\mathbf{V} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$$

$$\mathbf{V}_r = \mathbf{u}_r + \mathbf{v}_r + \mathbf{w}_r$$

y puesto que el valor medio de \mathbf{V}_t es \mathbf{V} , el valor medio de \mathbf{V}_r es un vector nulo. Es decir que $\mathbf{u}_r = \mathbf{v}_r = \mathbf{w}_r = 0$.

Es un hecho, resultado de la observación, que el módulo y el argumento del vector velocidad del aire en las capas bajas de la atmósfera varían, aumentando aquél y disminuyendo éste — ejes x e y en rotación ciclónica — al aumentar la altura, hasta que, a cierto nivel del orden del millar de metros, vuelve a regir el movimiento laminar obtenido al suponer que el suelo real se desliza sin rozamiento sobre la superficie de nivel cero (figura 2).

2. Simultáneamente con los primeros intentos de aplicación de las leyes de la mecánica al estudio de las corrientes de la atmósfera, Buys-Ballot descubrió en 1857, por el estudio de cartas sinópticas del tiempo, que entonces comenzaban a dibujarse, la relación que guardan las direcciones del viento y del gradiente de presión en la superficie del suelo, y enunció la ley que lleva su nombre. A partir de entonces no ha habido meteorólogo ni físico interesado en el estudio de la mecánica atmosférica, que no haya prestado atención al cambio que el viento experimenta en las capas cercanas al suelo.

La acumulación de observaciones exactas y el interés del tema, tanto en el aspecto práctico como en el teórico, han hecho producir una abundante bibliografía que, en las circunstancias en que este trabajo se redacta, sólo es posible reseñar de una manera incompleta.

Empíricamente se ha estudiado de preferencia la variación del módulo V del vector velocidad con la altura y, basadas en abundantes datos de observación, se han propuesto diversas fórmulas. Las dos que mejor representan las velocidades medidas son:

$$\frac{V}{V_s} = \left(\frac{z}{z_s} \right)^p, \quad (1)$$

en la que V y V_s son las velocidades a las alturas z y z_s , y p una constante; y

$$V_z = a \cdot \log(z + c) + b, \quad (2)$$

en la que a , b y c son constantes.

La ley logarítmica, análoga a la de von Kármán para la variación de la velocidad de líquidos por tubos, es hoy la más aceptada, si bien se supone que representa el perfil de la velocidad cuando el gradiente térmico vertical es el adiabático, mientras que la ley potencial es más apta en atmósferas estables. Desde luego, ambas fórmulas son principalmente usadas para las capas más bajas, hasta unos 50 metros, del estrato turbulento, aunque también se ha extendido su uso para toda la capa turbulenta.

Sutton (1936) (*) escribe la (2, 2) en la forma:

$$\frac{V}{V_s} = \frac{\log \left(1 + \alpha \frac{z}{z_s} \right)}{\log (1 + \alpha)} \quad (3)$$

y obtiene una variación de α con $\frac{dT}{dz}$, el gradiente vertical de temperatura, que le induce a dar a la magnitud constante α el título de índice del grado de turbulencia atmosférica, de igual modo a como él mismo (Sutton, 1932) estableció la variación del exponente p de la (1, 2) con $\frac{dT}{dz}$.

El estudio teórico del problema presenta serias dificultades. Si en las ecuaciones (1, 1) o (1', 1) se introduce una fuerza de resistencia elegida convenientemente, se puede obtener una explicación del hecho experimental descubierto por Buys-Ballot en la superficie del suelo; pero la dificultad no ha sido superada cuando se ha pretendido explicar el aumento y el giro de la velocidad del viento medio al aumentar la altura.

El primer intento de explicar el conjunto de los hechos observados, basado en un estudio del mecanismo mediante el cual se produce la variación del vector velocidad en las corrientes atmosféricas y oceánicas cerca de las superficies limitantes, se debe, respectivamente, a Taylor (1914) y Ekman (1905), quienes, con independencia y mucha prioridad el segundo, introdujeron en las ecuaciones del movimiento un término para tener en cuenta la viscosidad debida a los remolinos, extendiendo a la atmósfera y los océanos las ideas de Reynolds respecto a las causas que producen el movimiento turbulento de los líquidos en el interior de tubos. Suponiendo que K , el coeficiente de turbulencia, es independiente de la altura sobre el suelo, llegó Taylor a una solución matemática elegante, que puede resumirse en la conocida hélice-espiral equiangular de Ekman, cuyos puntos son los extremos del vector que representa la diferencia entre el viento del gradiente y el viento real a cada altura.

Taylor supuso que los remolinos son la causa del transporte vertical de cantidad de movimiento y de temperatura (Taylor, 1914), y después se ha extendido con éxito esta hipótesis a la difusión del vapor de agua en la atmósfera, problema íntimamente ligado con el de la evaporación en grandes masas de agua (Domingo Quílez, 1932); a la distribución de la carga eléctrica especial en las capas más bajas de la atmósfera (Brown, 1933), etc.

La fuerza tangencial de viscosidad F , observada en los líqui-

(1) Las referencias bibliográficas están hechas según el sistema Haward.

dos con movimiento laminar, cuyo valor se escribe $F = \eta \frac{dV}{dz}$, donde η es el coeficiente molecular de viscosidad, debe expresarse $F = \mu \frac{dV}{dz}$ en el caso de movimientos turbulentos, tanto en los líquidos como en la atmósfera. Aproximadamente, μ , llamado coeficiente molar de viscosidad, es igual a $\frac{1}{2} w \cdot d$, donde w es la velocidad vertical debida al remolino, y d , la distancia recorrida por una partícula de aire. La concordancia entre los valores de $K = \mu/\rho$, — del orden de 10^4 o 10^5 c. g. s. en tierra y 10^3 en el mar — deducidos por él y otros autores de observaciones termométricas en Terranova (Taylor, 1913) y en la torre Eiffel (Taylor, 1917), y de observaciones de vientos en la citada torre (Akerblom, 1908) y otros lugares (Hesselgerg y Sverdrup, 1916), dieron gran crédito a su teoría.

Posteriormente la comparación de los resultados teóricos con numerosos datos de observación, hecha por Brunt (1920), demostró la imposibilidad de aceptar la constancia de K respecto a la vertical. Los intentos hechos para obtener una expresión de K como función de z , que permitiera representar los datos experimentales o no han logrado el resultado que se deseaba, o no han permitido hacer integrables las ecuaciones diferenciales que se obtenían al plantear el problema.

Un resumen del estado de esta teoría en 1931 (Davies y Sutton, 1931) ha motivado alguna discusión de interés (Taylor, 1932; Davies y Sutton, 1932).

V. Bjerknes y sus colaboradores (1934, pág. 541) han establecido de nuevo las ecuaciones de movimiento en función de la presión, en lugar de la altura, con lo cual obtienen en casos particulares el valor de K en función de la presión atmosférica.

Limitado el estudio a las capas más cercanas al suelo, del orden de una decena de metros, se han hecho considerables avances por Sverdrup (1936), Prandtl (1924, 1932), Rossby y Montgomery (1935) y otros. Siguiendo a von Kármán, Prandtl consigue obtener la ley logarítmica de variación del viento con la altura, admitiendo que la «longitud de mezcla» de los estratos, debida a la turbulencia, es proporcional a la altura sobre el suelo. Los datos de observación de Best (1936) parecen confirmar esta ley en todos los casos, pero Sverdrup obtiene resultados distintos en atmósferas no adiabáticas y apunta razones teóricas que explicarían sus observaciones.

Debe notarse que, en estos últimos trabajos, se estudia lo que podría llamarse microturbulencia producida por superficies de terreno relativamente lisas — campos de nieve, playas, praderas; — pero no se trata la macroturbulencia que causan los árboles, colinas, edificios, etc., es decir, los obstáculos que normalmente constituyen las rugosidades de la superficie terrestre.

Otro aspecto de este mismo estudio es el referente a la fuerza

tangencial F , que la turbulencia introduce en la capa atmosférica cercana al suelo. Por analogía con el estudio del movimiento de fluidos por el interior de tubos o sobre superficies planas, se puede llegar a obtener para F una expresión,

$$F = a \cdot \rho \cdot V_s^2$$

donde a es una constante sin dimensiones. Conocida ésta, por ser $F = \mu \frac{dV}{dz} = K \rho \frac{dV}{dz}$ se obtiene:

$$K \frac{dV}{dz} = a V_s^2$$

que liga el gradiente de velocidad, el coeficiente de turbulencia y el módulo del vector velocidad junto al suelo. Taylor (1916), que fué el primero en obtener el valor de a en la atmósfera, cerca de Salisbury Plain, obtuvo un número muy próximo al de a determinado para el caso de agua que se mueve sobre una superficie de hierro. A resultados análogos han llegado Prandtl (1924) y otros investigadores.

Richardson (1922) y Sutcliffe (1936) han planteado el problema de calcular F , con eliminación de toda hipótesis previa acerca de cuál sea el mecanismo que origina la fuerza virtual de rozamiento, y el último ha obtenido valores de a de igual orden de magnitud. Heywood (1931), Giblett (1932) y otros han comprobado con abundancia de observaciones que a depende del gradiente vertical de temperatura.

El autor (1936, b), en una nota, ha indicado que el método de dimensiones permite introducir en la expresión de F el gradiente vertical de temperatura como una nueva variable de la cual depende la fuerza tangencial de resistencia; pero ha carecido del dispositivo experimental que permitiría determinar la forma de la función arbitraria que interviene en la fórmula.

En este trabajo se estudia, tanto teórica como experimentalmente, en los aspectos señalados, la macroturbulencia que es causa de la variación del viento con la altura en las capas bajas de la atmósfera y la resistencia que ofrece al viento la superficie del terreno; también se estudia la relación que existe entre el coeficiente de turbulencia y el gradiente vertical de temperatura.

3. Si se considera un volumen $\Delta\tau$ inmóvil a una altura z , la velocidad instantánea \mathbf{V}_i del aire contenido en él es igual a su velocidad media \mathbf{V} más la debida a los remolinos \mathbf{V}_r . Por razones de simetría las componentes de \mathbf{V}_r según los ejes coordenados son sólo funciones de z . Si se determina el valor medio de las componentes de \mathbf{V}_r , prescindiendo de su signo, se obtiene,

como ha demostrado y comprobado experimentalmente Taylor (1927),

$$[u_r] = [v_r] = [w_r]$$

lo que equivale a decir que existe equipartición de la energía de los remolinos según tres ejes rectangulares, proposición análoga a la que se formula en la teoría cinética de gases al tratar de la energía molecular. Estudios posteriores de Scrase (1930) parecen contradecir la equipartición de la energía de los remolinos en las capas atmosféricas próximas al suelo. Se ha supuesto, también por analogía, que las velocidades u_r , v_r y w_r se distribuyen alrededor de su valor medio en cada altura, según la ley de Maxwell, lo que significa que las dimensiones y energía de los remolinos individuales siguen la misma ley. Sin embargo, dada la complejidad que esta hipótesis introduce en el cálculo, sin que el resultado obtenido varíe más que por la aparición de un factor, bastará con tratar el problema considerando que los torbellinos poseen todas las dimensiones y energía medias que se obtendrían a partir de la ley de Maxwell.

Es interesante hacer la observación de que un remolino cuya velocidad vertical a la altura z sea w_z , se propaga a través de la masa de aire hacia las z crecientes y decrecientes perdiendo energía por los rozamientos considerables entre los diferentes filetes de aire, pero acelerando o retardando su velocidad según que la atmósfera sea inestable o estable. La aceleración de una partícula de aire que inicialmente posee la temperatura absoluta T_z es, a la distancia s de su punto de partida:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g \frac{T'_s - T_s}{T_s},$$

donde T'_s es la temperatura absoluta que tiene en s la masa de aire que se mueve verticalmente, y T_s la que correspondería a la atmósfera estratificada en aquel nivel. Si el gradiente vertical de temperatura en la atmósfera libre es θ' , y θ es el adiabático, se puede escribir sin gran error:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{g}{T_z} (\theta' - \theta)s,$$

que confirma lo establecido anteriormente.

Aun en atmósferas inestables, la observación demuestra que los remolinos no se propagan indefinidamente, lo que induce a suponer que la pérdida de energía producida por los rozamientos de los filetes de aire es, en último término, el factor dominante en la vida de los torbellinos.

Por el elemento de volumen $\Delta\tau$, durante un tiempo t suficientemente grande, habrá pasado una masa de aire que puede ser clasificada, atendiendo al valor de la velocidad vertical w que posee, según sea ésta positiva, negativa o nula. Esta consideración permite definir la fracción N_p de masa por centímetro

cúbico de aire que atraviesa el plano z en sentido ascendente. Por la ecuación de continuidad se deduce que existe otra masa igual $N\rho$ que atraviesa el plano z descendiendo.

La masa de aire $N\rho$ que pasa a través de un centímetro cuadrado del plano z en sentido, por ejemplo, ascendente, proviene de diferentes alturas $z-l$, en las que la velocidad media del viento es \mathbf{V}_{z-l} . En el tiempo dt atraviesa la superficie elemental $dx \cdot dy$ del plano z , con la velocidad w , la masa de aire contenida en el paralelepípedo $w \cdot dx \cdot dy \cdot dt$. Sea $d(n\rho)_l$ esta masa; como posee la velocidad media \mathbf{V}_{z-l} , la masa total que atraviesa el elemento de superficie $dx \cdot dy$ en el tiempo dt , posee una velocidad media

$$\frac{1}{\int_{l=0}^{l=L} d(n\rho)_l} \int_{l=0}^{l=L} \mathbf{V}_{z-l} d(n\rho)_l = \frac{1}{N\rho} \int_{l=0}^{l=L} \mathbf{V}_{z-l} d(n\rho)_l ; \quad (1)$$

por ser:

$$\int_{l=0}^{l=L} d(n\rho)_l = N\rho.$$

El límite L de las integrales es la distancia al plano z de la capa más distante cuyas partículas de aire pueden llegar hasta él. De igual modo, en sentido descendente, la masa de aire que atraviesa durante dt el área $dx \cdot dy$ a la altura z tiene una velocidad media:

$$\frac{1}{N\rho} \int_{l=0}^{l=L} \mathbf{V}_{z+l} d(n\rho)_l \quad (2)$$

El cálculo de estas velocidades medias supone la integración de las expresiones (1, 3) y (2, 3), lo que no es posible por figurar bajo el signo integral dos funciones de l desconocidas. Sin embargo, es posible obtener su valor mediante una hipótesis basada en el mecanismo de los remolinos y el conocimiento, por lo menos cualitativo, de este complejo aspecto de la mecánica de la atmósfera.

Los remolinos que se producen por el choque del aire contra las irregularidades del terreno, viajan a través de la atmósfera, independientemente del movimiento de conjunto de ella, y pueden ser, a su vez, causa de creación de nuevos remolinos. Únicamente interesa aquí el movimiento vertical de éstos y es un hecho experimental que la zona afectada por ellos tiene una altura H determinada en cada caso y variable según la naturaleza del terreno, el valor medio de la velocidad y el gradiente vertical de temperatura.

Si el plano z considerado hasta ahora, estuviera situado muy próximo al suelo, las masas que lo cruzaran en sentido ascendente procederían de una capa de espesor muy pequeño cuya

superficie inferior sería el suelo; mientras que los procedentes de la atmósfera superior provendrían de una capa cuya superficie más elevada estaría a una altura A .

Si se supusiera, por el contrario, que el plano z estaba muy próximo a H , las masas de aire lo cruzarían, hacia abajo, procedentes de los escasos y poco intensos remolinos que se encontraran entre z y H ; y, hacia arriba, pertenecientes a los remolinos propagados hasta la altura z , producidos entre el plano z y el del suelo, pues éstos, dada su mayor energía inicial, pueden, si bien muy amortiguados, alcanzar, por hipótesis, hasta la altura H .

El valor de L en la (1, 3) puede variar, por tanto, entre 0 y H ; y el de L' en la (2, 3) entre A y 0, cuando el plano se mueve desde $z = 0$ a $z = H$. H es, según esto, el recorrido máximo ascendente, y A el recorrido máximo descendente, de los remolinos.

En todo caso se tiene:

$$L = z;$$

y para determinar L' sólo se poseen los valores:

$$\begin{aligned} L' &= A, & \text{para } z = 0; \\ L' &= 0, & \text{para } z = H. \end{aligned}$$

Si se admite como suficientemente aproximado que es

$$L'(z) = L'(0) + \left(\frac{dL'}{dz} \right)_{z=0} \cdot z,$$

lo que equivale a suponer una variación lineal de L' con z , se tiene para $z = H$:

$$0 = A + \left(\frac{dL'}{dz} \right)_{z=0} \cdot H,$$

y, por tanto:

$$L'(z) = A - \frac{A}{H} z.$$

Substituyendo estos valores de L y L' en las (1, 3) y (2, 3), y teniendo en cuenta que el módulo, V , de \mathbf{V} es una función creciente con z , se puede escribir para las componentes coordenadas de la velocidad:

$$\begin{aligned} u_{z-\lambda} &= \frac{1}{N\rho} \int_0^z u_{z-l} \cdot d(n\rho)_l = u_z (1 - \beta_1); \\ v_{z-\lambda} &= \frac{1}{N\rho} \int_0^z v_{z-l} \cdot d(n\rho)_l = v_z (1 - \beta_2); \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} u_{z+\lambda} &= \frac{1}{N_p} \int_0^{A - \frac{A}{H}z} u_{z+l} d(n_p)_l = u_{A\beta'_1 + z(1 - \frac{A}{H}\beta'_1)}; \\ v_{z+\lambda} &= \frac{1}{N_p} \int_0^{A - \frac{A}{H}z} v_{z+l} d(n_p)_l = v_{A\beta'_2 + z(1 - \frac{A}{H}\beta'_2)}; \end{aligned} \right\}$$

donde los diferentes β cumplen la condición $0 < \beta < 1$. *A priori* no es posible establecer que sean $\beta_1 = \beta_2$ y $\beta'_1 = \beta'_2$.

El valor de $u_{z(1-\beta_1)}$ puede obtenerse mediante un desarrollo en serie limitado a sus dos primeros términos:

$$u_{z(1-\beta_1)} = u_z - \left(\frac{du}{dz} \right)_z z \beta_1;$$

y de igual modo:

$$v_{z(1-\beta_2)} = v_z - \left(\frac{dv}{dz} \right)_z z \beta_2;$$

$$u_{A\beta'_1 + z(1 - \frac{A}{H}\beta'_1)} = u_z + \left(\frac{du}{dz} \right)_z \left(A - \frac{A}{H}z \right) \beta'_1;$$

$$v_{A\beta'_2 + z(1 - \frac{A}{H}\beta'_2)} = v_z + \left(\frac{dv}{dz} \right)_z \left(A - \frac{A}{H}z \right) \beta'_2.$$

La suma algébrica de las cantidades de movimiento que cruzan en sentido ascendente el área $dx \cdot dy$ durante el tiempo dt , es:

$$wN_p \left\{ u_z - \left(\frac{du}{dz} \right)_z z \beta_1 - u_z - \left(\frac{du}{dz} \right)_z \left(A - \frac{A}{H}z \right) \beta'_1 \right\} dx \cdot dy \cdot dt =$$

$$= wN_p \left(\frac{du}{dz} \right)_z \left(A\beta'_1 + z(\beta_1 - \frac{A}{H}\beta'_1) \right) dx \cdot dy \cdot dt;$$

$$wN_p \left\{ v_z - \left(\frac{dv}{dz} \right)_z z \beta_2 - v_z - \left(\frac{dv}{dz} \right)_z \left(A - \frac{A}{H}z \right) \beta'_2 \right\} dx \cdot dy \cdot dt =$$

$$wN_p \left(\frac{dv}{dz} \right)_z \left(A\beta'_2 + z(\beta_2 - \frac{A}{H}\beta'_2) \right) dx \cdot dy \cdot dt.$$

En el paralelepípedo $dx \cdot dy \cdot dz$ durante dt , entran por la base inferior y salen por la superior, respectivamente, las cantidades de movimiento expresadas por las dos últimas igualdades y por:

$$\begin{aligned} & -wN_p \left\{ \left(\frac{du}{dz} \right)_z \left(A\beta'_1 + z(\beta_1 - \frac{A}{H}\beta'_1) \right) + \right. \\ & \left. \frac{d}{dz} \left(\left(\frac{du}{dz} \right)_z \left(A\beta'_1 + z(\beta_1 - \frac{A}{H}\beta'_1) \right) \right) dz \right\} dx \cdot dy \cdot dt; \\ & -wN_p \left\{ \left(\frac{dv}{dz} \right)_z \left(A\beta'_2 + z(\beta_2 - \frac{A}{H}\beta'_2) \right) + \right. \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dz} \left(\left(\frac{dv}{dz} \right)_z \left(A\beta'_1 + z \left(\beta_1 - \frac{A}{H} \beta'_1 \right) \right) \right) dz \left\{ dx \cdot dy \cdot dt, \right.$$

pues por la ecuación de continuidad debe ser:

$$\frac{d(N\rho w)}{dz} = 0.$$

Por tanto, en el volumen y tiempo considerados, se tiene una ganancia de cantidad de movimiento:

$$\begin{aligned} \rho \frac{du}{dt} dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt &= w N \rho \frac{d}{dz} \left\{ \left(\frac{du}{dz} \right)_z \left(A\beta'_1 + z \left(\beta_1 - \frac{A}{H} \beta'_1 \right) \right) \right\} dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt; \\ \rho \frac{dv}{dt} dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt &= w N \rho \frac{d}{dz} \left\{ \left(\frac{dv}{dz} \right)_z \left(A\beta'_1 + z \left(\beta_1 - \frac{A}{H} \beta'_1 \right) \right) \right\} dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt. \end{aligned}$$

Como se supone alcanzado el régimen estacionario, se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dz} \left(\frac{du}{dz} \left(A\beta'_1 + z \left(\beta_1 - \frac{A}{H} \beta'_1 \right) \right) \right) &= 0; \\ \frac{d}{dz} \left(\frac{dv}{dz} \left(A\beta'_1 + z \left(\beta_1 - \frac{A}{H} \beta'_1 \right) \right) \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ecuaciones diferenciales cuya integración permite obtener la variación de la velocidad del viento medio con la altura en la capa turbulenta.

4. La integral de las (3, 3) es inmediata:

$$u = \frac{C}{\beta_1 - \frac{A}{H} \beta'_1} \log \left(A\beta'_1 + z \left(\beta_1 - \frac{A}{H} \beta'_1 \right) \right) + C'; \quad (1)$$

y otra ecuación análoga para v , con constantes de integración C_1 y C'_1 en vez de C y C' .

La determinación de las constantes puede hacerse introduciendo el valor del viento del gradiente, observado a $z = H$, y del viento a otra altura cualquiera. Parece lo más sencillo escoger para esta segunda altura la del nivel cero, donde la velocidad del viento puede ser nula. Sin embargo, como la aplicación principal que de esta teoría se hace es en problemas de meteorología dinámica, donde se adopta como plano de referencia el situado a la altura de los anemómetros, es más conveniente tomar como nivel de referencia una superficie plana cuya altura es la del anemómetro usado para la medida del viento o la altura media de la capa inferior de la atmósfera para la cual se mide la velocidad del viento con auxilio de globos pilotos.

Sean u_s y o las componentes del viento a la altura de este suelo artificial de altura $z = 0$. Y sean u_γ y v_γ las componentes del viento del gradiente que se observa a $z = H$. se tiene:

$$u = u_s + \frac{u_\gamma - u_s}{\log. \left(1 + \frac{H\beta_1 - A\beta'_1}{A\beta'_1}\right)} \log. \left(1 + z \frac{H\beta_1 - A\beta'_1}{AH\beta'_1}\right) \quad (2a)$$

$$v = \frac{v_\gamma}{\log. \left(1 + \frac{H\beta_2 - A\beta'_2}{A\beta'_2}\right)} \log. \left(1 + z \frac{H\beta_2 - A\beta'_2}{AH\beta'_2}\right) \quad (2b)$$

o bien:

$$u = u_s + \frac{u_\gamma - u_s}{P} \log. (1 + Qz) \quad (3a)$$

$$v = \frac{v_\gamma}{P_1} \log. (1 + Q_1 z) \quad (3)$$

donde son:

$$\left. \begin{aligned} P &= \log. \left(1 + \frac{H\beta_1 - A\beta'_1}{A\beta'_1}\right) = \log. (1 + QH) \\ P_1 &= \log. \left(1 + \frac{H\beta_2 - A\beta'_2}{A\beta'_2}\right) = \log. (1 + Q_1 H) \\ Q &= \frac{H\beta_1 - A\beta'_1}{AH\beta'_1} \\ Q_1 &= \frac{H\beta_2 - A\beta'_2}{AH\beta'_2} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Las ecuaciones (3a, 4) y (3b, 4) representan en el espacio la curva que define el perfil de la velocidad (fig. 3), y en el plano XY, tomando z como parámetro, la proyección del perfil de la velocidad sobre dicho plano. De modo que, si desde un punto tomado como origen de vectores, se dibujan los que representan la velocidad del viento a diferentes alturas, sus extremos se hallarán en los puntos de una curva —la hodógrafa (*)— cuyas ecuaciones paramétricas son las (3a, 4) y (3b, 4). Trazando por aquel punto dos ejes coordenados rectangulares, las proyecciones de los radios vectores de los diferentes puntos de la curva, serán las componentes del viento observado a la altura correspondiente, según los ejes coordenados elegidos. Las tangentes a la hodógrafa tienen por coeficiente angular

$$\frac{dv}{du} = \frac{P}{P_1} \frac{Q_1}{Q} \frac{v_\gamma}{u_\gamma - u_s} \frac{1 + Qz}{1 + Q_1 z}$$

Se puede determinar una altura z_0 —negativa— tal que sean $u = u_0$ y $v = v_0$, iguales a las componentes del viento en

(*) Se usa aquí la palabra «hodógrafa» en substitución de la frase «proyección del perfil de la velocidad sobre un plano horizontal». Si se hace abstracción de la velocidad vertical del globo piloto, esta curva sería la hodógrafa de su movimiento de arrastre, producido por el viento de las diferentes capas que sucesivamente atraviesa.

el suelo real; su valor absoluto es la altura sobre éste del suelo artificial. De (3a, 4) y 3b, 4) se deduce:

$$z_0 = \frac{e \frac{P(u_0 - u_s)}{u_\gamma - u_s} - 1}{Q} \quad (5)$$

y

$$z_0 = \frac{e \frac{P_1 \frac{v_0}{v_\gamma}}{v_\gamma} - 1}{Q_1} \quad (6)$$

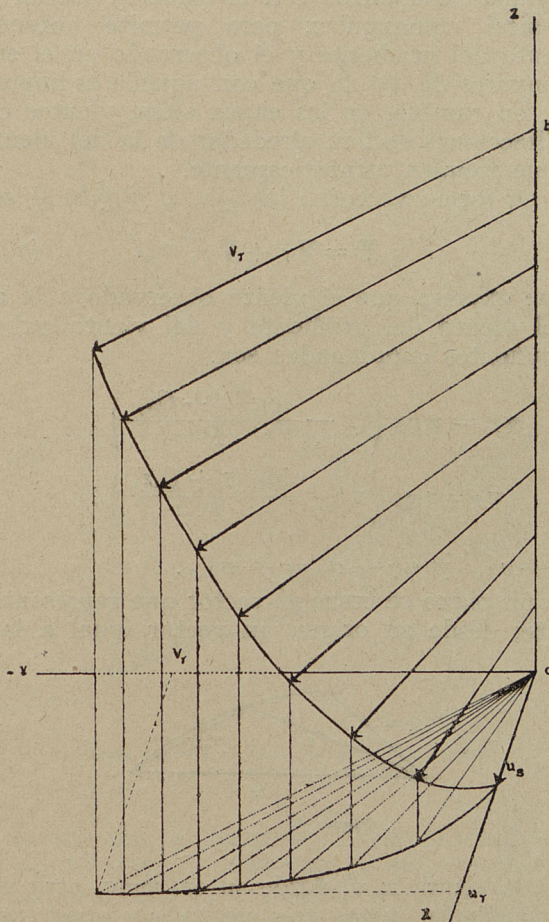


Figura 3.- Perfil de la velocidad del viento turbulento.

que con las (4, 4), puesto que P , P_1 , Q y Q_1 se calculan por los datos de observación y z_0 es conocido, permiten determinar las

constantes H , A , β_1 , β'_1 , β_2 y β'_2 que intervienen en las (2a, 4) y (2b, 4).

La curva (3a, 4) (3b, 4) es, en el espacio, una hélice-espiral logarítmica y en el plano XY una espiral logarítmica, de tipo particular. De ambas curvas sólo son utilizables para este problema, los arcos definidos para los valores de z tales que

$$z_0 < z < H.$$

Estos arcos de espiral resumen el régimen de viento que se observa entre el suelo real y la altura H , límite de la capa turbulenta en la cual se mide el viento del gradiente. Esta solución presenta algunas semejanzas con la solución Taylor-Ekman de la hélice-espiral equiangular; pero permite obtener ángulos entre el viento del gradiente y el observado en el suelo real o artificial, mayores de 45° lo que con aquélla es imposible; y no se obtienen, en cambio, en las capas altas, vientos cuyas velocidades y direcciones oscilan alrededor de la del viento del gradiente, al que tienden asintóticamente.

Escritas en forma vectorial las (3a, 4) y (3b, 4) se tiene:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_\gamma + \mathbf{V}_T, \quad (7)$$

igualdad que expresa que el viento observado a la altura z es la suma del viento del gradiente y del viento turbulento \mathbf{V}_T , cuyas componentes coordenadas son:

$$\begin{aligned} u_T &= u_{T,s} \left(1 - \frac{\log(1 + Qz)}{P} \right); \\ v_T &= v_{T,s} \left(1 - \frac{\log(1 + Q_1 z)}{P_1} \right); \end{aligned} \quad (8)$$

pues $v_\gamma = -v_{T,s}$ y $u_\gamma = u_s = -u_{T,s}$.

Si sobre un plano se traza el vector que representa el viento del gradiente; desde su origen un vector igual a la velocidad

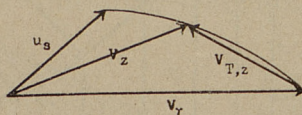


Figura 4.

observada a la altura z ; y, desde su extremo, otro vector igual al viento turbulento, estos tres vectores cierran un triángulo cuyo tercer vértice, al variar z , recorre el arco de la espiral logarítmica de ecuaciones paramétricas (3a, 4) y (3b, 4) (fig. 4).

Si fueran $\beta_1 = \beta'_1$ y $\beta_2 = \beta'_2$, se tendría:

$$P = P_1 \quad \text{y} \quad Q = Q_1;$$

de las (3a, 4) y (3b, 4) se obtiene entonces:

$$\frac{u - u_s}{u_\gamma - u_s} = \frac{v}{v_\gamma}, \quad (9)$$

igualdad que indica que el perfil de la velocidad se proyecta sobre el plano XY según una recta; o bien, que el perfil de la

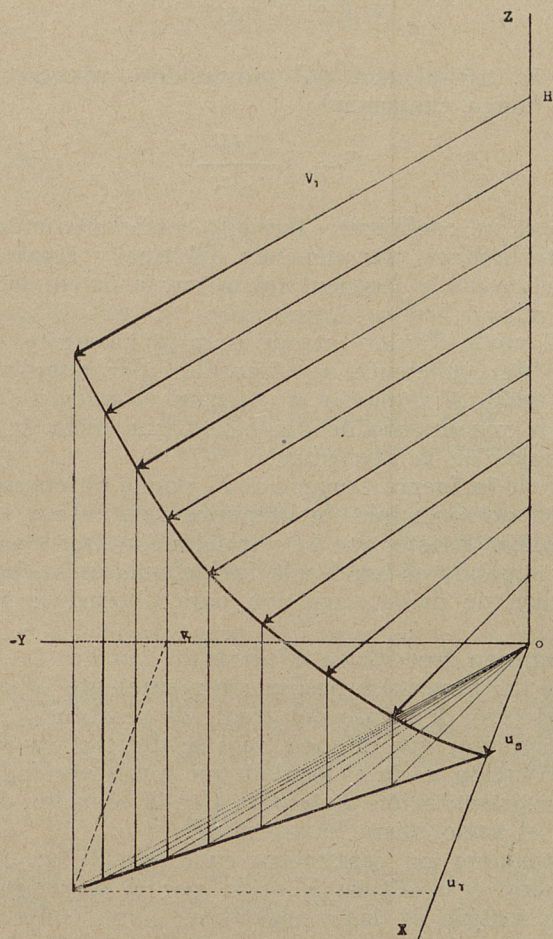


Figura 5.- Perfil de la velocidad del viento turbulento. Caso particular.

velocidad es una espiral logarítmica situada en el plano vertical que pasa por la recta de ecuación (9) (fig. 5). En este caso es imposible suponer que la velocidad se anula en el suelo real; pues la (9, 4) se reduce con esta hipótesis a:

$$\frac{u}{u_\gamma} = \frac{v}{v_\gamma},$$

lo cual supondría que la velocidad iría aumentando hasta alcanzar el valor de la del gradiente conservando siempre igual dirección, lo que es contrario a lo observado.

5. a) En la teoría de la dinámica de flúidos viscosos se define una fuerza tangencial F , cuyo valor por unidad de área es:

$$F = \eta \frac{dV}{dz}$$

Cuando la turbulencia del movimiento aparece, se define una nueva fuerza tangencial,

$$F = \mu \frac{dV}{dz} \quad (1)$$

en la que μ es un coeficiente, llamado coeficiente molar de viscosidad por torbellinos, que depende del tipo y escala del movimiento considerado y frecuentemente varía de un punto a otro dentro del mismo flúido (Lamb, 1924, §, 366, b).

De igual modo Taylor introdujo en la mecánica atmosférica el concepto de coeficiente de viscosidad por remolinos y estableció una igualdad como la (1, 5) para el cálculo de la fuerza tangencial de rozamiento debida a la turbulencia del viento en las capas bajas de la atmósfera.

El valor de la fuerza tangencial F , puede obtenerse mediante la aplicación del principio de dinámica referente a la cantidad de movimiento. Puesto que la variación de cantidad de movimiento por segundo es igual a la fuerza que actúa, basta expresar la cuantía de dicha variación para obtener la fuerza tangencial.

En el régimen descrito en el párrafo 1, cuando se supone que la superficie del terreno se desliza sin rozamiento sobre la superficie de nivel cero, el viento del gradiente se observa a todas las alturas; al suponer que el suelo real se detiene, se verifica una nueva distribución de la velocidad que antes era independiente de z , cuya representación matemática es la ecuación (7, 4), valedera desde el suelo hasta la altura H .

Si se considera un centímetro cuadrado de un plano horizontal, situado a la altura $H - dz$, por él se disipará, en un segundo, en sentido de las z negativas, como consecuencia del movimiento turbulento, una cantidad de movimiento:

$$\rho (\mathbf{V}_{H-dz} - \mathbf{V}_\gamma) dz = \rho \mathbf{V}_{T,H-dz} dz$$

Como es $\mathbf{V}_\gamma > \mathbf{V}_{H-dz}$, se tiene un flujo de cantidad de movimiento negativo, que debe ser igual a la fuerza tangencial a la altura $H - dz$.

La integral extendida hasta la altura z ,

$$\int_z^H \rho \mathbf{V}_{T,z} dz$$

representa la pérdida de cantidad de movimiento que, por segundo, experimenta el estrato de aire turbulento comprendido entre z y H . Es preciso tener en cuenta el efecto debido a la rotación de la Tierra antes de establecer la igualdad entre la pérdida de cantidad de movimiento y la fuerza tangencial. Como se ha establecido en (2, 1), es

$$\text{— grad. } p = i\Omega\rho V_T ;$$

es decir, que para pasar en la atmósfera de cantidades de mo-

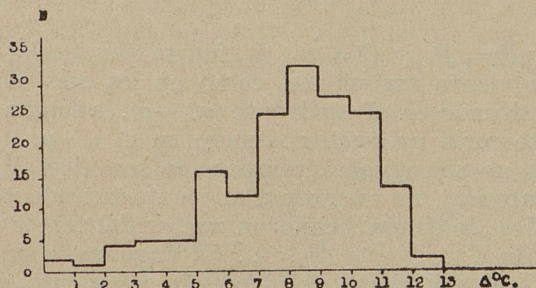


Figura 6.- Distribución del número, N , de sondeos según el valor de la diferencia de temperaturas, Δ , entre Febra y Montseny.

vimientos a fuerzas es preciso multiplicar aquéllas por el factor Ωi que introduce el arrastre de los ejes coordenados por el planeta en su rotación diurna. Por lo tanto, se tiene:

$$\mathbf{F}_z = \Omega i \int_z^H \rho \mathbf{V}_{T,z} dz$$

y si prescindimos de las variaciones de ρ , siempre pequeñas entre los niveles z y H , y, por ello, despreciables dada la aproximación que se obtiene en los problemas meteorológicos,

$$\mathbf{F}_z = \Omega \rho i \int_z^H \mathbf{V}_{T,z} \cdot dz$$

Descompuesta según los ejes coordenados, elegidos de tal modo que sea $\mathbf{V}_s = \mathbf{u}_s$, se tiene por las (8, 4)

$$\left. \begin{aligned} F_{x,z} &= -\Omega \rho v_{T,s} \int_z^H \left(1 - \frac{\log(1 + Q_1 z)}{P_1} \right) dz \\ F_{y,z} &= \Omega \rho u_{T,s} \int_z^H \left(1 - \frac{\log(1 + Qz)}{P} \right) dz \end{aligned} \right\} (2)$$

Si el límite inferior de estas integrales es el nivel del suelo artificial, la F se refiere a la fuerza de resistencia medida a la altura de los anemómetros. Desde luego podría también obtenerse, sin más que escribir como límite inferior de las integrales anteriores

el valor de z_0 dado en (5, 4) o (6, 4), la fuerza tangencial al nivel del suelo real, aunque su determinación no tiene gran interés práctico.

Integradas las (2, 5) y haciendo $z = 0$, por ser $u_{T,s} = u_s - u_\gamma$ y $v_{T,s} = -v_\gamma$, se tiene:

$$\left. \begin{aligned} F_{x,o} &= -\Omega \rho v_{T,s} \frac{Q_1 H - P_1}{P_1 Q_1} \\ F_{y,o} &= \Omega \rho u_{T,s} \frac{QH - P}{PQ} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Si fueran $P = P_1$ y $Q = Q_1$, la fuerza tangencial sería perpendicular la viento turbulento; como en los ejes elegidos éste es un vector situado en el cuadrante $(u, -v)$, la fuerza tangencial de rozamiento sería un vector situado en el $(-u, -v)$.

Si P y P_1 no son iguales, tampoco lo son Q y Q_1 ; la fuerza tangencial, entonces, no es normal al viento turbulento, aunque, de todos modos, continúa siendo un vector del tercer cuadrante, puesto que son $F_x < 0$ y $F_y < 0$. El ángulo que forma con el eje de las X , es decir, con la dirección del viento en el suelo artificial, es

$$\text{tag } \varphi = -\frac{u_{T,s}}{v_{T,s}} \frac{QH - P}{Q_1 H - P_1} \frac{P_1 Q_1}{P Q} > 0$$

b) Sobre un centímetro cúbico de aire a la altura del suelo ficticio actúan simultáneamente, en la hipótesis de que no existe aceleración, la fuerza del gradiente, G , de componentes

$$G_x = G \cdot \cos \alpha \text{ y } G_y = G \cdot \sin \alpha;$$

la fuerza desviadora de la Tierra, $-\Omega \rho u_s$, según el eje OY ; y la fuerza debida al rozamiento de componentes Φ_x y Φ_y . Por lo tanto, debe ser:

$$G \cos \alpha + \Phi_x = 0$$

$$G \sin \alpha + \Phi_y - \Omega \rho u_s = 0,$$

de donde se obtiene para el ángulo de desviación del viento superficial respecto al del gradiente,

$$\text{tg } \alpha = -\frac{\Omega \rho u_s - \Phi_y}{\Phi_x}$$

Como es $\Phi = -\frac{dF}{dz}$, puede obtenerse fácilmente una expresión para el ángulo que la dirección del viento real a cualquier altura, forma con la del viento superficial o con la del viento del gradiente.

6. Al hacer extensiva la igualdad (1, 5) a la representación de la fuerza tangencial de resistencia que aparece por la turbu-

lencia del movimiento del aire en la atmósfera, es preciso tener en cuenta, como ya se ha hecho notar, que la rotación de la Tierra afecta a los movimientos de esta escala. Por ello no puede aplicarse exactamente igual razonamiento en el caso de la atmósfera que en el de movimientos de fluidos en el interior de tubos o sobre superficies de reducidas dimensiones, ni en el caso de los movimientos que se estudian en los laboratorios, pues a la escala reducida en que tienen lugar los experimentos, la aceleración de Coriolis, producida por la rotación de la Tierra, no introduce variación apreciable en la velocidad del fluido.

Puesto que en un régimen turbulento atraviesan en ambos sentidos, por un plano horizontal z , masas de aire afectadas por velocidades diferentes, existe a través de él un flujo de cantidad de movimiento por unidad de área y segundo proporcional a $\frac{du}{dz}$

y $\frac{dv}{dz}$. Esta pérdida de cantidad de movimiento experimentada por el estrato superior — supuesto el más veloz — al plano considerado, puede ser tenida en cuenta en las ecuaciones de movimiento del aire por la intervención de una fuerza, originada por la turbulencia: la fuerza tangencial de rozamiento. Según lo dicho acerca de la relación que existe en la atmósfera entre fuerzas y cantidades de movimiento por el hecho del arrastre de los ejes de referencia por la Tierra, se puede escribir:

$$\mathbf{F} = F_x + i F_y = \Omega i \left(\mu'_x \frac{du}{dz} + i \mu'_y \frac{dv}{dz} \right)$$

o sea:

$$F_x = -\Omega \mu'_y \cdot \frac{dv}{dz}$$

$$F_y = \Omega \cdot \mu'_x \cdot \frac{du}{dz}$$

donde $-\Omega \mu'_y = \mu_y$ y $-\Omega \mu'_x = \mu_x$ son los llamados coeficientes de viscosidad por torbellinos, según las direcciones de los ejes coordenados.

Comparando estas igualdades con las (2, 5), se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} -\Omega v_{T,s} \int_z^H \left(1 - \frac{\log(1 + Qz)}{P_1} \right) dz &= \frac{\mu_y}{\rho} \left(\frac{dv}{dz} \right)_z \\ -\Omega u_{T,s} \int_z^H \left(1 - \frac{\log(1 + Qz)}{P} \right) dz &= \frac{\mu_x}{\rho} \left(\frac{du}{dz} \right)_z \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

donde el límite inferior de la integral es el valor de z para el cual se determinan $\frac{dv}{dz}$ y $\frac{du}{dz}$.

Aunque generalmente no se habla más que de μ , coeficiente

molar de viscosidad por remolinos, o de $\mu/\rho = K$, coeficiente de turbulencia, en la atmósfera pueden ser distintos μ y K según la dirección de que se trate.

Derivando las (3a, 4) y (3b, 4) y substituyendo en (2, 6) se deduce:

$$\left. \begin{aligned} K_{x,z} &= \frac{P}{Q}(1 + Qz) \Omega \int_z^H \left(1 - \frac{\log(1 + Qz)}{P} \right) dz \\ K_{y,z} &= \frac{P_1}{Q_1}(1 + Q_1z) \Omega \int_z^H \left(1 - \frac{\log(1 + Q_1z)}{P_1} \right) dz \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

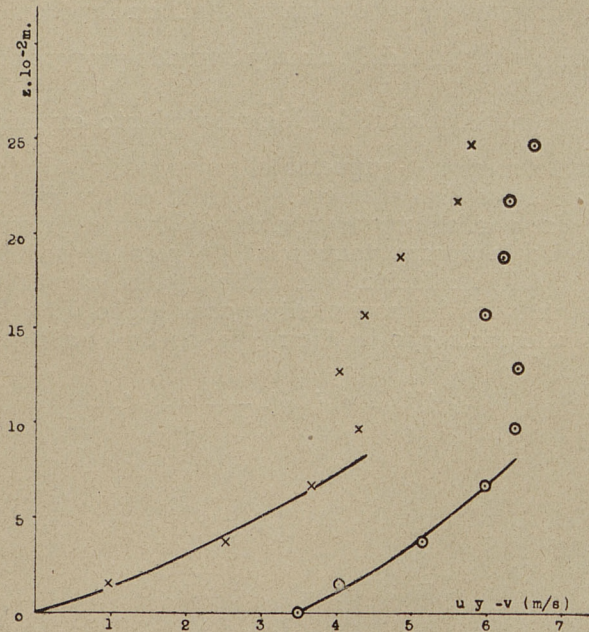


Figura 7.-Variación de las componentes u (○) y $-v$ (+) del viento con la altura z . (Gradiente medio de temperatura potencial, $\theta = 0,645 \cdot 10^{-4}$).

ecuaciones que representan el valor del coeficiente de turbulencia en función de la altura.

Si fueran $P = P_1$ y $Q = Q_1$, se tendría:

$$K_x = K_y$$

a todos los niveles.

De las (3, 6) se deduce que $K_x = K_y = 0$ para $z = H$, es decir, para el límite de la capa turbulenta.

Para $z = 0$, o sea para el nivel a que se supone situado el suelo artificial, se tiene integrando las (3, 6):

$$\left. \begin{aligned} K_{x,o} &= \Omega \frac{QH - P}{Q^2} \\ K_{y,o} &= \Omega \frac{Q_1 H - P_1}{Q_1^2} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

que permiten calcular el coeficiente de turbulencia a la altura de los anemómetros mediante las constantes que intervienen en la expresión logarítmica del perfil de la velocidad y la altura de la capa perturbada por la turbulencia.

7. Desde Reynolds se sabe que el método de dimensiones permite abordar el estudio de la fuerza tangencial de resistencia. Se obtiene así fácilmente:

$$F = \frac{\mu^2}{\rho D^2} f \left(\frac{V \rho D}{\mu} \right)$$

donde f representa una función potencial de $n = \frac{V \rho D}{\mu}$ número sin dimensiones — el llamado número de Reynolds — y D es el diámetro del tubo por cuyo interior se supone que circula el fluido. A partir de un valor de n igual o mayor que 2.200, el movimiento del fluido se hace turbulento.

Si suponemos que en la expresión anterior es $f = \frac{b V \rho D}{\mu}$ se obtiene la ley de Poiseuille,

$$F = \frac{b V \mu}{D}$$

válida cuando el flujo es laminar, y en la que b es una constante a determinar experimentalmente; y si hacemos $f = \alpha \frac{V^2 \rho^2 D^2}{\mu^2}$ se obtiene:

$$F = a \rho V^2 \quad (I)$$

fórmula que fué aplicada por Taylor (1916) para determinar la resistencia que opone al viento la superficie de la Tierra.

Se sabe hoy que la (I, 7) no es aplicable a la atmósfera si a es una constante, diferente para cada lugar según la rugosidad del terreno, pero invariable en cada punto, cualquiera que sea el gradiente térmico vertical, pues, por determinaciones hechas en diferentes lugares, se ha venido en conocimiento de que a es una función del grado de estabilidad de la atmósfera.

El autor (1936,b) ha hecho ya notar que puede establecerse por el método de dimensiones la dependencia de a con el gradiente vertical de temperatura. Puesto que F se ha comprobado que en la atmósfera es función de: ρ , densidad del aire; μ , coeficiente molar de viscosidad por torbellinos; θ , gradiente vertical de temperatura potencial, y V_s , velocidad del viento en la superficie, se tendrá:

$$F = \rho^\alpha \cdot V_s^\beta \cdot \mu^\gamma \cdot \theta^\delta \cdot \text{constante}$$

o en términos de dimensiones:

$$\left\{ \frac{M}{LT^2} \right\} = \left\{ \frac{M}{L^3} \right\}^\alpha \cdot \left\{ \frac{L}{T} \right\}^\beta \cdot \left\{ \frac{M}{LT} \right\}^\gamma \cdot \left\{ \frac{1}{L} \right\}^\delta$$

con las ecuaciones de condición:

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha + \gamma \\ -1 &= -3\alpha + \beta - \gamma - \delta \\ -2 &= -\beta - \gamma \end{aligned}$$

de las que, dejando indeterminado β , se obtiene:

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta - 1 \\ \gamma &= 2 - \beta \\ \delta &= 2 - \beta \end{aligned}$$

de modo que es:

$$F = \frac{\mu^2 \theta^2}{\rho} \left(\frac{\rho V_s}{\mu \theta} \right)^\beta$$

o con más generalidad:

$$F = \frac{\mu^2 \theta^2}{\rho} f \left(\frac{\rho V_s}{\mu \theta} \right) \quad (2)$$

en la que f representa una función potencial. Se ve en (2, 7) que θ representa aquí el mismo papel que $1/D$ en el número de Reynolds.

Si se hace $f = \frac{b \rho V_s}{\mu \theta}$, donde b es una constante, se obtiene una expresión análoga a la Poiseuille:

$$F = b \rho K V_s \theta$$

y si es $f = a \frac{\rho^2 V_s^2}{\mu^2 \theta^2}$, resulta

$$F = a \rho V_s^2 \quad (3)$$

en la que a es constante, fórmula igual a la adoptada por Taylor. En ella se ve que, de ser aplicable, la fuerza tangencial sería independiente de la turbulencia y del gradiente vertical de temperatura, consecuencias que, como ya se ha dicho, se ha comprobado repetidas veces que son contrarias a los resultados de la experiencia.

La fórmula (3, 13) obtenida en este trabajo para la atmósfera concuerda con la ley de Poiseuille que es la correspondiente al flujo laminar en los problemas de hidráulica.

8. — En el párrafo 3 se han introducido dos altitudes H y A que representan, respectivamente, la altura mayor a que alcanzan los remolinos, por lo que se ha llamado recorrido máximo ascendente, la cual coincide con la altura de la capa perturbada por el movimiento turbulento; y la altura máxima de donde proceden los remolinos que, descendiendo a través de la masa de aire, llegan hasta el suelo, por lo que se la ha llamado recorrido máximo descendente de los remolinos. Como éstos, independientemente del movimiento de conjunto de la masa de aire en que se forman, viajan a través de ella, se comprende fácilmente

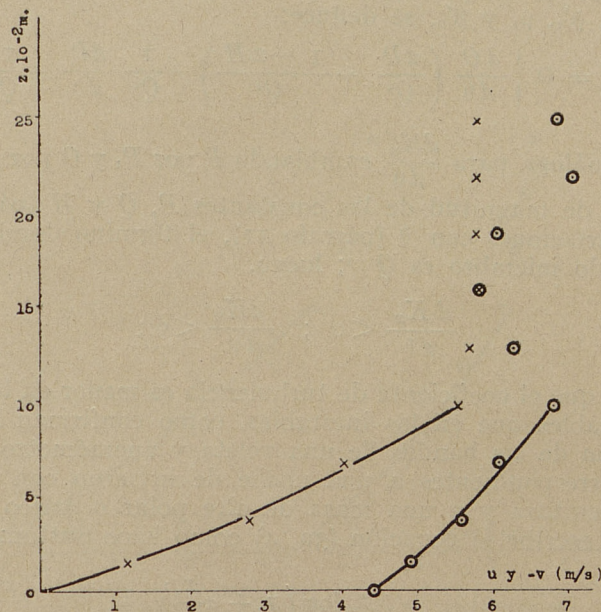


Figura 8.- Variación de las componentes u (○) y $-v$ (+) del viento con la altura z . (Gradiente medio de temperatura potencial, $\theta = 0,415 \cdot 10^{-2}$).

que en masas cuya velocidad tenga componente vertical positiva llegarán a alturas mayores que en las masas con componente vertical negativa. Si la atmósfera es superadiabática su gradiente vertical de temperatura potencial es negativo, y, por lo tanto, una masa de aire inicialmente desviada hacia arriba por el choque con un obstáculo del terreno, tendrá una aceleración positiva. Los remolinos que se engendren en tal masa de aire, a igualdad de energía, tendrán un recorrido máximo ascendente H mayor que en atmósferas estables; mientras que los que se muevan en dirección de las z decrecientes y alcancen en su recorrido hasta el suelo, procederán de una altura A , recorrido máximo descendente, menor que en los casos en que la temperatura po-

tencial aumente con la altura. Como en una atmósfera inestable cabe suponer que los remolinos tienen una mayor energía que en una estable, será siempre $\frac{dH}{d\theta} < 0$; en cambio, el signo de $\frac{dA}{d\theta}$ dependerá de θ y de la naturaleza del terreno, pues aunque a menor θ correspondería para remolinos de igual energía, menor A , puede ocurrir — caso de Barcelona (párrafo 11) — que al aumentar la inestabilidad atmosférica, se produzcan remolinos de mayor energía, para los cuales el valor de A sea superior que el correspondiente a atmósferas más estables.

De las (4, 6), prescindiendo de las variaciones que puedan sufrir β_1 , β'_1 , β_2 y β'_2 , se deduce:

$$\frac{dK_x}{d\theta} = \Omega \left\{ \frac{dQ}{d\theta} \left(\frac{2P}{Q^3} + \frac{1-2H}{Q^2} \right) - \frac{1}{Q^3} \frac{dP}{d\theta} + \frac{1}{Q} \frac{dH}{d\theta} \right\}$$

y otra análoga para $\frac{dK_y}{d\theta}$ cambiando P por P_1 y Q por Q_1 . Dado el orden de magnitud de las constantes P , Q y H (párrafo 10) y sus variaciones con θ (párrafo 11), el término dominante en el segundo miembro es Q^{-1} ; luego,

$$\frac{dK_x}{d\theta} < 0 ; \quad \frac{dK_y}{d\theta} < 0 ;$$

es decir, que el coeficiente de turbulencia es menor en las atmósferas estables que en las inestables, como confirman la simple inspección de las bandas de una veleta y anemómetro registradores correspondientes a una noche de invierno con inversión de temperatura y a una masa de aire polar o ártico reciente.

Si se escribe la ecuación (3a, 4) como hace Sutton:

$$\frac{u_z}{u_1} = \frac{\log \left(1 + \alpha \frac{z}{z_1} \right)}{\log (1 + \alpha)}$$

lo que equivale a admitir que la velocidad se anula para $z = 0$ y que toma el valor u_1 a la altura $z = z_1$, se ve que es:

$$\alpha = Q \cdot \text{constante}$$

Si es $\beta_1 = \beta'_1$, se tiene que,

$$Q = \frac{H - A}{HA}$$

y por tanto será:

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = \text{constante} \left\{ \frac{\frac{dH}{d\theta}}{H^2} - \frac{\frac{dA}{d\theta}}{A^2} \right\}$$

Para que sea $\frac{d\alpha}{d\theta} < 0$ como ha obtenido Sutton (1936), es preciso que sea

$$\frac{H'}{H^2} < \frac{A'}{A^2}.$$

9. Para el estudio experimental de la variación del viento con la altura y la posible confirmación de las consecuencias hasta ahora deducidas en los párrafos anteriores, se han usado los datos obtenidos con el lanzamiento de globos pilotos en la

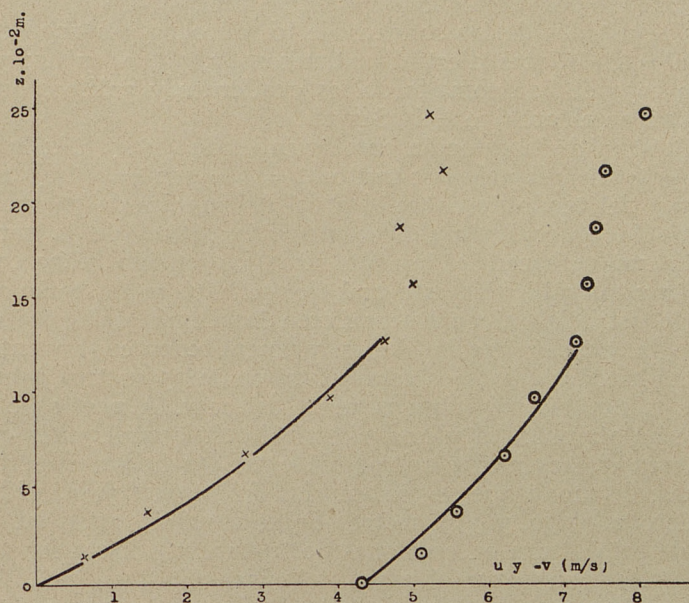


Figura 9.- variación de las componentes u (○) y $-v$ (+) del viento con la altura z . (Gradiente medio de temperatura potencial, $\theta = 0,280 \cdot 10^{-4}$).

estación aerológica del «Servei Meteorològic de Catalunya», establecida en Barcelona.

Los sondeos, que ofrecen toda garantía apetecible, se efectúan generalmente entre 11 y 13 horas, por el procedimiento de teodolito único, con globos cuyo peso oscila entre 55 y 70 gramos.

De entre más de 1600 sondeos efectuados durante los años 1933 a 1937, ambos incluidos, se han seleccionado 171, atendiendo, primero, a que el régimen de viento observado entre el nivel del teodolito y 2.500 metros de altura corresponda a lo que Cave (1912) llamó una «corriente sólida», es decir, a que no existan discontinuidades o bruscas variaciones de la dirección y de la velocidad del viento en las diferentes capas, las cuales indican la existencia de gradientes horizontales de temperatura

que alteran en las capas altas el gradiente bórico observado junto al suelo. La situación de la estación aerológica de Barcelona es desfavorable en este aspecto por la proximidad del mar que produce, en ausencia de la brisa, en muchas ocasiones, una inflexión de las isobaras en las capas bajas de la atmósfera. En segundo lugar se ha atendido, al hacer la selección, a que las capas para las cuales se ha medido el viento se encuentren siempre a los mismos niveles. Y, por último, se ha prescindido de todos aquellos sondeos que no han alcanzado altura superior a los 2.000 metros, con el fin de que al determinar el viento medio a las diversas alturas afectadas por la turbulencia, se pueda atribuir igual peso a todas las observaciones.

Los resultados de los sondeos de los años 1933 a 1936 están publicados en «Notes d'estudi» números 57, 59, 64 y 67; y los del año 1937 se han tomado de los cuadernos y gráficos que se conservan en el archivo del «Servei».

La latitud de la estación aerológica es de $41^{\circ} 23' N.$; la aceleración de Coriolis vale por tanto: $\Omega = 2 \cdot \omega \cdot \sin \varphi = 0,965 \cdot 10^{-4}$. La altura del teodolito sobre el nivel del mar es de 70 metros.

Como la observación del viento a la altura de la terraza desde la cual se hacen los lanzamientos, no ha sido hecha con la precisión requerida para este trabajo, se ha tomado como nivel del suelo artificial, al cual se refieren los demás datos de cada sondeo, la altitud media de la primera capa cuyo viento se conoce. En todos los casos esta altura es de 75 metros sobre la terraza, o 145 metros sobre el nivel del mar. A partir de este nivel se ha atribuido el viento observado en las diferentes capas a la altura que es media aritmética entre las de sus superficies extremas; de modo que se conocen las direcciones y velocidades del viento a 0,150 y 375 metros sobre el suelo artificial, y a partir de esta altura en escalones de 300 metros hasta los 2.475 metros (2.620 m. sobre el nivel del mar). En los dos últimos escalones el número de sondeos es solo de 170 y 161 respectivamente.

Atendiendo a los meses de los lanzamientos los sondeos se distribuyen en la forma que se muestra en la última columna del cuadro I. La escasez de sondeos seleccionados en los meses de verano es consecuencia de la brisa que perturba el régimen dinámico de la atmósfera en las capas más próximas al suelo, lo que inutiliza los sondeos correspondientes para este estudio. La proporción de los sondeos es aproximadamente de 2 en los meses fríos a 1 en los meses cálidos.

CUADRO I

Clasificación por meses de los sondeos utilizados en el cálculo

MESES	$\Delta T \text{ } ^\circ\text{C} =$ $0.10^4 \text{ } ^\circ\text{C/cm} =$	4.61 0.64 _s	7.61 0.41 _s	9.36 0.28 ₀	11.15 0.14 ₂	Número total de sondeos
Enero		5	8	12	4	29
Febrero		7	5	6	2	20
Marzo		3	5	7	4	19
Abril		3	6	5	2	16
Mayo		2	2	5	3	12
Junio		1	3	5	0	9
Julio		7	2	3	1	13
Agosto		1	1	2	1	5
Septiembre		2	3	0	2	7
Octubre		4	3	5	1	13
Noviembre		1	2	4	4	11
Diciembre		5	4	6	2	17
Totales .		41	44	60	26	171

En el cuadro I, las cuatro columnas encabezadas Δ y θ corresponden a una posterior clasificación de los sondeos seleccionados atendiendo al gradiente vertical de temperatura. En

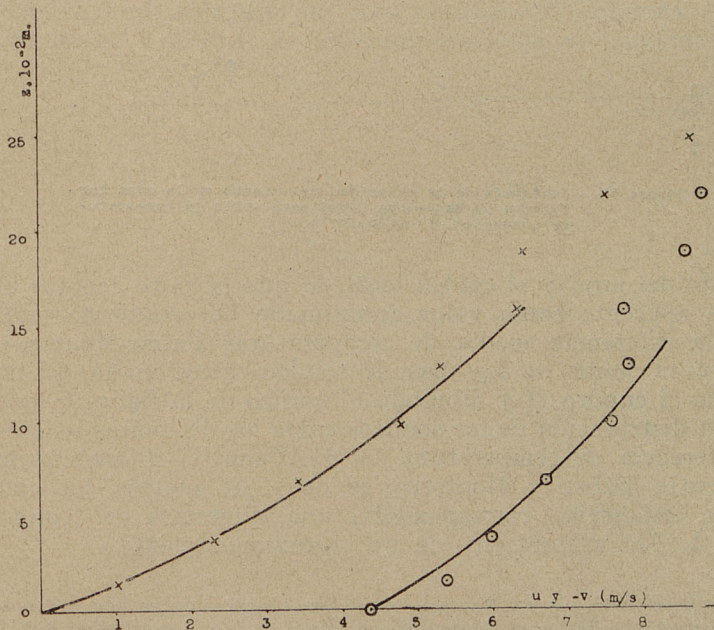
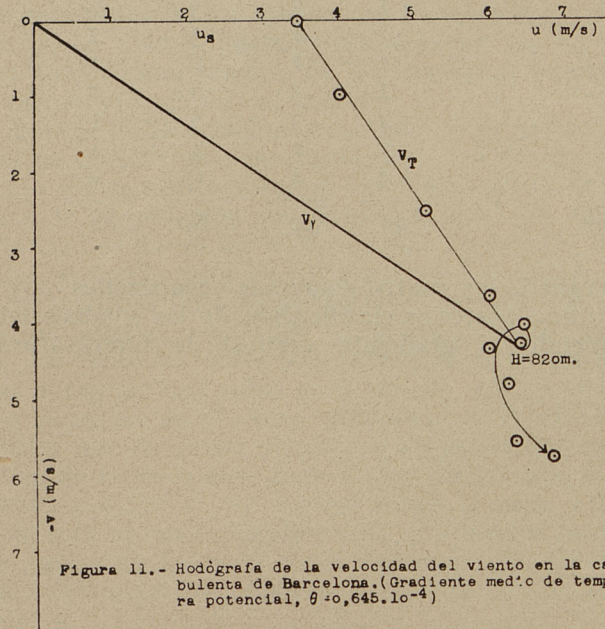


Figura 10.- Variación de las componentes u (\odot) y $-v$ (+) del viento con la altura z . (Gradiente medio de temperatura potencial, $\theta = 0.142 \cdot 10^{-4}$)

ausencia de datos mejores, se han usado, para determinar aproximadamente el gradiente térmico, las observaciones de temperatura hechas en el Observatorio Fabra, situado en el monte Tibidabo, a unos 4 km. al N. de la estación aerológica y a una altitud de 412 metros sobre el nivel del mar; y las del observatorio de altura del Turó de l'Home, en la sierra de Montseny, a 48 km. al NNE. de Barcelona y a una altitud de 1.713 metros. El gradiente aparente entre Fabra y Montseny no coincide, en general, con el del aire libre sobre Barcelona; pero dada la hora de los sondeos, es posible que exista alguna compensación entre la acción orográfica (tendencia al adiabatismo por el movimiento



ascendente del aire) y el caldeo local, lo que permite aceptar el gradiente aparente como valor aproximado del gradiente real.

Con la diferencia media de temperaturas Fabra-Montseny entre 8 y 12 horas de los días de sondeo seleccionado, se ha construido el cuadro II y dibujado el gráfico de la figura 6, que indican la distribución de los sondeos entre los diferentes valores de la diferencia de temperatura, Δ (*). Como la diferencia de alturas entre Fabra y Montseny es de 1.301 metros, en una atmósfera adiabática correspondería una diferencia de temperaturas, Δ , Fabra-Montseny de 13° aproximadamente.

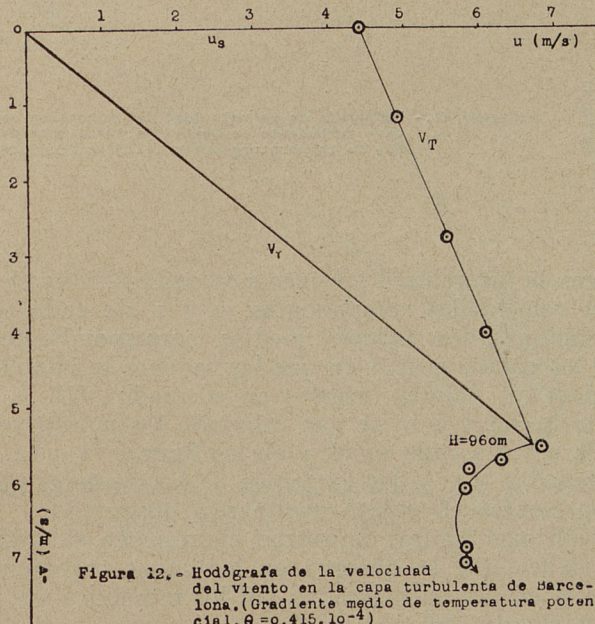
(*) En 6 casos en que en Montseny no se hizo observación se han utilizado las temperaturas medidas en el observatorio de altura de Sant Jeroni (Montserrat), cuya altitud es de 1230 metros aproximadamente, obteniéndose por extrapolación el valor probable de Δ .

CUADRO II

Clasificación de los sondeos según la diferencia de temperaturas, Δ , entre los observatorios Fabra y Montseny

Δ	Número de sondeos
$0 < \Delta \leq 0,9$	2
$0,9 < \Delta \leq 1,9$	1
$1,9 < \Delta \leq 2,9$	4
$2,9 < \Delta \leq 3,9$	5
$3,9 < \Delta \leq 4,9$	5
$4,9 < \Delta \leq 5,9$	16
$5,9 < \Delta \leq 6,9$	12
$6,9 < \Delta \leq 7,9$	25
$7,9 < \Delta \leq 8,9$	33
$8,9 < \Delta \leq 9,9$	28
$9,9 < \Delta \leq 10,9$	25
$10,9 < \Delta \leq 11,9$	13
$11,9 < \Delta \leq 12,9$	2

Con estos datos se ha podido proceder a la formación de cuatro grupos de sondeos según el valor observado de Δ , cuyo valor medio para cada uno de ellos encabeza la columna correspondiente del cuadro I. El gradiente medio de temperatura potencial



observado en los días de los sondeos pertenecientes a cada grupo está representado por los valores de θ que figuran, expresados en grados centígrados por centímetro, en el mismo cuadro.

No se ha hecho distinción entre los sondeos atendiendo a la dirección del viento superficial, porque en la mayoría de ellos esta dirección está comprendida entre el S. y el NW., siendo muy escasos los sondeos con componente E.

El viento observado a cada altura en cada sondeo se ha descompuesto en dos direcciones rectangulares X e Y (eje Y en rotación ciclónica respecto al eje X), haciendo siempre coincidir el eje X con la dirección del viento al nivel del suelo artificial,

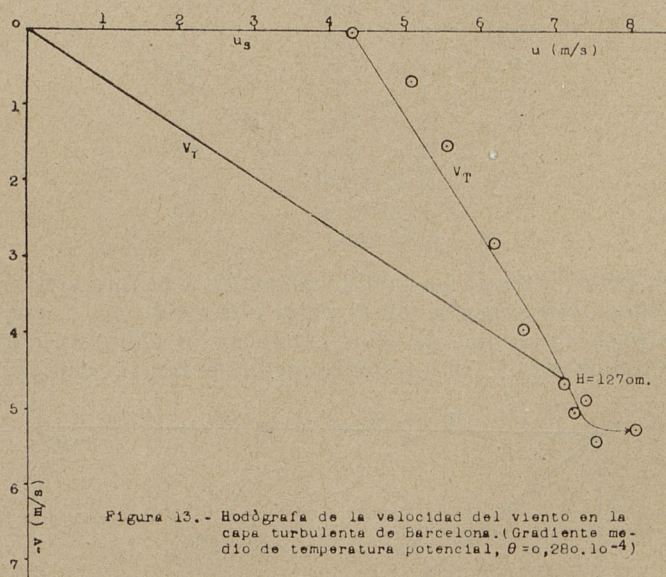


Figura 13.- Hodógrafa de la velocidad del viento en la capa turbulenta de Barcelona. (Gradiente medio de temperatura potencial, $\theta = 0,280, 10^{-4}$)

es decir, con la dirección del viento a 75 metros sobre el teodolito. Con estas velocidades componentes, u y v , de cada sondeo, se han determinado los valores medios correspondientes a cada altura de los cuatro grupos en que los sondeos se han clasificado, obteniéndose los valores insertos en el cuadro III.

En las figuras 7 a 10 se han dibujado los puntos representativos de la u y v a cada nivel; y en las figuras 11 a 14, tomando como ordenadas u y v , los extremos de los vectores que a cada altura representan el viento medio real observado.

Estas últimas figuras muestran claramente el distinto régimen de viento que se observa en las capas turbulentas de la atmósfera y en las no afectadas por los remolinos que producen las irregularidades del suelo.

CUADRO III

Valores medios en m/s de las velocidades componentes del viento

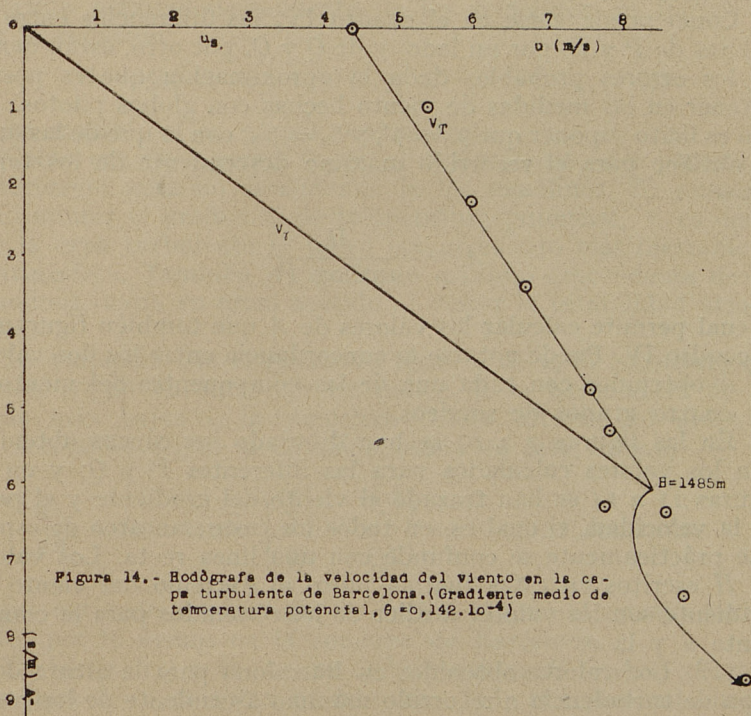
Alturas sobre el teodolito m.	Alturas sobre el suelo artificial m.	$\Delta T = 4,61^{\circ} \text{C}$ $\theta = 0,645 \cdot 10^{-4}$ $^{\circ}\text{C/cm}$		$\Delta T = 7,61^{\circ}\text{C}$ $\theta = 0,415 \cdot 10^{-4}$ $^{\circ}\text{C/cm}$		$\Delta T = 9,36^{\circ} \text{C}$ $\theta = 0,280 \cdot 10^{-4}$ $^{\circ}\text{C/cm}$		$\Delta T = 11,15^{\circ} \text{C}$ $\theta = 0,142 \cdot 10^{-4}$ $^{\circ}\text{C/cm}$	
		u	-v	u	-v	u	-v	u	-v
75	0	3,48	0,00	4,41	0,00	4,31	0,00	4,36	0,00
225	150	4,04	0,98	4,91	1,17	5,12	0,65	5,38	1,03
450	375	5,15	2,54	5,57	2,77	5,57	1,50	5,99	2,30
750	675	5,98	3,67	6,08	4,02	6,22	2,78	6,70	3,43
1050	975	6,38	4,30	6,80	5,54	6,61	3,91	7,56	4,78
1350	1275	6,41	4,05	6,26	5,70	7,17	4,65	7,83	5,32
1650	1575	5,97	4,37	5,84	5,83	7,32	5,01	7,75	6,34
1950	1875	6,21	4,84	5,79	6,07	7,45	4,85	8,57	6,42
2225	2175	6,30	5,60	5,79	7,06	7,57	5,41	8,80 ⁽¹⁾	7,53 ⁽¹⁾
2550	2475	6,60	5,79	5,80 ⁽²⁾	6,87 ⁽²⁾	8,12 ⁽³⁾	5,24 ⁽³⁾	9,63 ⁽⁴⁾	8,65 ⁽⁴⁾
Núm. de sondeos		41		44		60		26	

(1) Media de 25 sondeos.

(2) Media de 40 sondeos.

(3) Media de 56 sondeos.

(4) Media de 24 sondeos.



10. Con los valores medios observados de u y v dentro del estrato turbulento, se han calculado, por aproximaciones sucesivas y mínimos cuadrados, para cada uno de los cuatro grupos de globos pilotos, los coeficientes P , P_1 , Q y Q_1 y los valores de $u\gamma$ y $v\gamma$ que intervienen en las ecuaciones:

$$u = u_s + \frac{u\gamma - u_s}{P} \log (1 + Qz)$$

$$v = \frac{v\gamma}{P_1} \log (1 + Q_1z)$$

Los resultados figuran en el cuadro IV, donde también se han incluido los valores de H , recorrido máximo ascendente de los remolinos, obtenidos de las (4, 4) que transformadas dan

$$H = \frac{\text{antilog } P - 1}{Q}$$

Excepto en el caso de atmósfera casi adiabática, los valores de H obtenidos por la fórmula anterior aplicada a la componente u , son muy próximos de los obtenidos por medio de la componente v . Es muy probable que la diferencia que se obtiene entre ambos valores de H para atmósferas casi inestables sea debida al escaso número de sondeos con que se han determinado los valores de P y Q .

Como puede verse en el cuadro IV, las diferencias entre los valores de P y P_1 por un lado, y de Q y Q_1 por otro, están dentro de los errores probables dada la aproximación que es posible obtener en las medidas de viento hechas con globos pilotos. Por ello es lícito suponer que $\beta_1 = \beta'_1$ y $\beta_2 = \beta'_2$, con lo que de las (4, 4) se obtiene para el recorrido máximo descendente de los torbellinos:

$$A = \frac{H}{\text{antilog } P}$$

la cual permite calcular los valores de A que también figuran en el cuadro IV. Puede notarse la concordancia entre los dos valores de A obtenidos con cada una de las componentes del viento en los cuatro grupos de sondeos.

En las figuras 7 a 10 se han dibujado las curvas obtenidas con los valores calculados para las diferentes P y Q ; y en las figuras 11 a 14 se han trazado el viento del gradiente y el perfil de la velocidad, el cual es, en todos los casos, un arco de espiral que prácticamente se confunde con una línea recta. Los valores de H escritos en estas figuras junto al extremo del viento del gradiente son los valores medios de los obtenidos para la componente u y la v .

11. Los valores obtenidos en Barcelona para la altura de la capa de turbulencia o recorrido máximo ascendente de los remo-

linos H , pueden representarse (fig. 15) aproximadamente, por la ecuación

$$H = 1.134 + 1.370 \cdot 10^4 \cdot (0,37 \cdot 10^{-4} - \theta) \quad (1)$$

en la que H se mide en metros y θ en grados centígrados por centímetro.

CUADRO IV

Valores de u , v , P , Q , H y A para cada grupo de sondeos

$\theta =$	$0,645 \cdot 10^{-4}$		$0,415 \cdot 10^{-4}$		$0,280 \cdot 10^{-4}$		$0,142 \cdot 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C/cm}$	
	u	v	u	v	u	v	u	v
$u_\gamma(\text{m/s})$	6,4	—	6,7	—	7,2	—	8,3	—
$v_\gamma(\text{m/s})$	—	—4,4	—	—5,5	—	—4,6	—	—6,4
P	0,262	0,264	0,298	0,299	0,364	0,374	0,402	0,450
$Q(1/\text{m})$	0,00102	0,00101	0,00104	0,00102	0,00106	0,00105	0,00110	0,00115
$H(\text{m.})$	810	830	950	970	1240	1300	1390	1580
$A(\text{m.})$	445	450	480	485	535	550	550	560
$H(\text{m.})$	820		960		1270		1485	
$A(\text{m.})$	448		483		543		555	

De la misma manera se pueden representar los valores de A , recorrido máximo descendente de los remolinos en Barcelona, por la ecuación:

$$A = 507 + 229 \cdot 10^4 \cdot (0,37 \cdot 10^{-4} - \theta) \quad (2)$$

(A en metros; θ , en $^\circ\text{C}$ por centímetro).

Como era de esperar, según el razonamiento del párrafo 8, el recorrido máximo ascendente de los remolinos, H , aumenta al disminuir el gradiente de temperatura potencial, θ , es decir, que la capa turbulenta es tanto mayor cuanto más inestable es la atmósfera. También A , recorrido máximo descendente de los remolinos, varía en igual sentido al variar la estabilidad atmosférica.

La variación con el gradiente térmico de α , la constante que Sutton (1936) encontró ser un índice de la turbulencia de las capas más bajas de la atmósfera (hasta alturas del orden de 10 metros) es según la notación usada en este trabajo:

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = \text{constante} \left\{ \frac{\frac{dH}{d\theta}}{H^2} - \frac{\frac{dA}{d\theta}}{A^2} \right\} = -0,022 \cdot \text{constante}$$

lo que extiende el resultado de Sutton a todo el estrato turbulento, por lo menos en la comarca de Barcelona.

De las (1, 11) y (2, 11) se deduce que es $H = A = 380$ metros, para $\theta = 0,92 \cdot 10^{-4}$. En este caso, todo el rozamiento hecho

en el párrafo 3 para la obtención de las ecuaciones diferenciales que permiten obtener la ley logarítmica de variación del viento con la altura, sigue siendo válido, y como se puede admitir que es $\beta_1 = \beta'_1$ y $\beta_2 = \beta'_2$, la integración conduce a las expresiones:

$$u = \frac{c}{H} z + c'$$

$$v = \frac{c_1}{H} z + c'_1$$

donde las distintas c son las constantes de integración.

Hellmann (1915) en Nauhen, por observaciones de la velocidad del viento hasta alturas de 32 metros hechas sobre una pradera, encontró la fórmula potencial

$$V = Kz^{1/5}$$

análoga a la (1, 2) haciendo $p = 1/5$. Sutton (1932) en Leafield obtuvo un exponente que varía entre $p = 0.07$ para atmósferas adiabáticas y $p = 0.17$ para atmósferas con menor gradiente de temperatura. El autor (1936, a), por observaciones con globos pilotos hechas en Madrid, obtuvo para la constante p valores comprendidos entre $p = 0.15$ para las observaciones de las primeras horas de la tarde con fuertes gradientes de temperatura y $p = 0.23$ para las observaciones de la mañana cuando el gradiente es más débil por ser más frecuentes las inversiones de temperatura. Barkat Ali (1932), en Agra ha obtenido una variación de p análoga.

Las fórmulas aquí obtenidas (3, 11) para todo el estrato turbulento, son de la forma potencial con un valor de p igual a la unidad. Como el gradiente de temperatura potencial $\theta = 0.92.10^{-4}$ para el que estas fórmulas son válidas, corresponde aproximadamente a una atmósfera isoterma, en los casos en que la atmósfera sobre Barcelona fuera constante en un espesor del orden de 400 metros a partir del suelo, dejaría de ser aplicable la ley logarítmica obtenida en el párrafo 4. Parece deducirse de aquí que la expresión potencial de la variación del viento con la altura, es válida sólo excepcionalmente, si bien la aproximación que con ella se obtiene aumenta con la mayor estabilidad de la atmósfera.

12. De las (3,5) se obtiene siendo $P = P_1$ y $Q = Q_1$:

$$F_{x,0} = \Omega \rho v_{\gamma} \frac{HQ - P}{PQ}$$

$$F_{y,0} = \Omega \rho (u_s - u_{\gamma}) \frac{HQ - P}{PQ}$$

cuyos valores deducidos de los consignados en el cuadro IV, haciendo $\rho = 1.2 \cdot 10^{-3}$, figuran en el cuadro V. Para hacer com-

parables entre sí los valores de la fuerza tangencial, se han expresado también en el cuadro V los de $F_1 = \Omega_p \frac{HQ - P}{PQ}$ que corresponden a velocidades $v_\gamma = u_s - u_\gamma = 1$ cm.

Los valores del coeficiente de turbulencia, por ser $P = P_1$ y $Q = Q_1$, son iguales para las dos componentes; los resultados que se obtienen para Barcelona figuran también en el cuadro V.

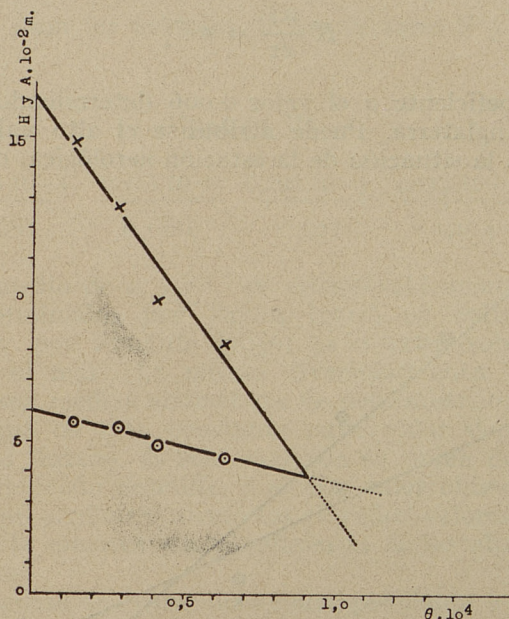


Figura 15.- Variación de los recorridos máximos ascendente H (+) y descendente A (O) con el gradiente de temperatura potencial θ .

CUADRO V

Valores en unidades c.g.s. de la fuerza tangencial de resistencia y del coeficiente de turbulencia en Barcelona, para cada uno de los cuatro grupos de sondeos.

θ	$0,645 \cdot 10^{-4}$	$0,415 \cdot 10^{-4}$	$0,280 \cdot 10^{-4}$	$0,142 \cdot 10^{-4}$ °C/cm
$-F_{x,0}$	10,8	14,3	13,4	20,3
$-F_{y,0}$	7,1	6,0	8,4	12,3
F_1	$2,46 \cdot 10^{-2}$	$2,60 \cdot 10^{-2}$	$2,90 \cdot 10^{-2}$	$3,14 \cdot 10^{-2}$
K	$5,36 \cdot 10^5$	$6,27 \cdot 10^5$	$8,42 \cdot 10^5$	$9,48 \cdot 10^5$

El orden de magnitud obtenido para el coeficiente de turbulencia en Barcelona es 10^5 c.g.s., que concuerda con los obtenidos en otros lugares (Brunt, 1923, pág. 34), si bien es algo superior a ellos. En España sólo conoce el autor una determinación hecha por él mismo (1936, a) con los resultados de los sondeos de Madrid, cuyo valor medio es $4,1 \cdot 10^4$ c.g.s. En el trabajo citado se adoptó para la determinación de K la fórmula

$$K \frac{dV}{dz} = a V_s^2$$

dando al coeficiente a el valor 0,006 determinado por Sutcliffe (1936) en Inglaterra. Puede atribuirse el alto valor de K en Barcelona a la situación de la estación aerológica, dentro de una

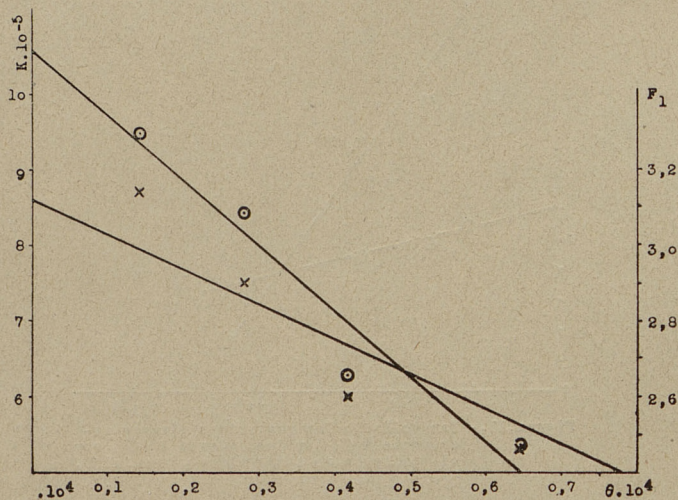


Figura 16.- Variación del coeficiente de turbulencia K (○) y de la fuerza tangencial unidad F_1 (+) con el gradiente de temperatura potencial θ .

gran ciudad con elevados edificios y rodeada de montes cercanos que alcanzan altitudes de más de 400 metros sobre el teodólito.

Los valores de K se han dibujado en la figura 16, junto con los valores de F_1 , como función de θ . También se han dibujado las rectas que representan la variación de K y de F_1 con θ , supuesta una dependencia lineal. Los valores de F_1 pueden representarse por la recta de ecuación:

$$F_1 = 2,78 \cdot 10^{-2} + 0,927 \cdot 10^{-2} (0,37 \cdot 10^{-4} - \theta)$$

la cual permite calcular el valor de F_1 para cualquier valor de θ . Y análogamente se obtiene:

$$K = 7,38 \cdot 10^5 + 8,65 \cdot 10^5 (0,37 \cdot 10^{-4} - \theta)$$

que expresa el valor de K como función de θ . De acuerdo con lo expuesto en el párrafo 8 es $\frac{dK}{d\theta} < 0$.

13. En el cuadro VI se han escrito los valores de la constante a de la fórmula de Taylor

$$F = a \rho V_s^2$$

donde F y V_s son los módulos de los vectores \mathbf{F} y \mathbf{V}_s .

CUADRO VI

$\theta^\circ\text{C/cm.} =$	$0,645 \cdot 10^{-4}$	$0,415 \cdot 10^{-4}$	$0,280 \cdot 10^{-4}$	$0,142 \cdot 10^{-4}$	Media
$a =$	0,081	0,066	0,071	0,104	0,08

El valor medio de a , 0,08, es considerablemente más alto que los determinados por Taylor (1916) en Salisbury Plain ($a = 0,003$) y por Sutcliffe (1936) ($a = 0,006$ sobre tierra y 0,0004 sobre el mar). La misma diversidad entre los valores citados, que son medias aritméticas de determinaciones numerosas, indica que de esta constante cuyo valor depende de la naturaleza del terreno, es sólo conocido su orden de magnitud, como ya ha indicado Sutcliffe; y el alto valor obtenido en Barcelona hay que atribuirlo, como los elevados valores de K , a la topografía de la comarca y a la influencia de las altas construcciones urbanas.

Si se prescinde del valor de a correspondiente a los sondeos hechos en atmósferas muy estables, cuya velocidad media junto al suelo es un 25 % inferior a las de los otros grupos de sondeos, los cuales poseen velocidades junto al suelo muy próximas entre sí, puede apreciarse una variación de a con θ , análoga a la obtenida por otros autores de diferentes comarcas.

Puesto que, como se ha visto, es:

$$\mathbf{F} = i \mathbf{V}_T (2,78 \cdot 10^{-2} + 0,927 \cdot 10^{-2} (0,37 \cdot 10^{-4} - \theta)), \quad (1)$$

si se compara esta expresión con la obtenida en el párrafo 7 por el método de dimensiones, es preciso hacer en la (2, 7)

$$f = \frac{b \rho V_T}{\mu \theta}$$

con lo que se obtiene una fórmula semejante a la de Poiseuille

$$\mathbf{F} = b \rho k \theta \mathbf{V}_T + \mathbf{F}_0 \quad (2)$$

donde \mathbf{F}_0 es el valor que toma la \mathbf{F} en una atmósfera adiabática.

De (1, 12) y (2, 12) se deduce adoptando para K el valor medio $7,38 \cdot 10^4$:

$$\mathbf{F}_0 = 3,12 \cdot 10^2 i \mathbf{V}_T;$$

$$b = -0,105 i;$$

con lo que la (2, 13) se escribe:

$$\mathbf{F} = (3,12 \cdot 10^{-2} - 0,105 \rho K \theta) i \mathbf{V}_T, \quad (3)$$

que permite obtener con aceptable aproximación el valor de la fuerza tangencial en Barcelona para los distintos valores de \mathbf{V}_T, θ y K .

RESUMEN

Se estudia en este trabajo la variación del viento con la altura debida a la macroturbulencia que producen los obstáculos del terreno en todo el estrato perturbado por los torbellinos, y su relación con el gradiente vertical de temperatura. Los torbellinos que se engendran entre el suelo, $z = 0$, y H , altura a la que se observa el viento del gradiente, viajan a través del estrato turbulento en todas direcciones. Como se admite que la energía media de los remolinos disminuye al aumentar la altura, podrán llegar al nivel $z = H$ los remolinos engendrados junto al suelo, mientras que a éste sólo llegarán los producidos en un estrato de espesor $A < H$. H es el recorrido máximo ascendente y A el recorrido máximo descendente de los remolinos. Con esta hipótesis y admitiendo una variación lineal de A con z , se obtienen las ecuaciones

$$u = u_s + \frac{u_\gamma - u_s}{P} \log(1 + Qz)$$

$$v = \frac{v_\gamma}{P_1} \log(1 + Q_1 z)$$

donde u_γ y v_γ son las componentes del viento del gradiente, u_s se el viento observado al nivel cero y P, P_1, Q y Q_1 , constantes tales que $P = \log(1 + QH)$, $P_1 = \log(1 + Q_1 H)$. Si es $P = P_1$, la proyección del perfil de la velocidad sobre el plano XY es una recta y una espiral logarítmica en caso contrario. La fuerza tangencial de resistencia es:

$$F_{x,0} = \Omega \rho v_\gamma \frac{Q_1 H - P_1}{P_1 Q_1}; \quad F_{y,0} = \Omega \rho (u_s - u_\gamma) \frac{QH - P}{P Q}$$

y los coeficientes de turbulencia tienen por expresión:

$$K_{x,0} = \Omega \frac{QH - P}{Q^2}; \quad K_{y,0} = \Omega \frac{Q_1 H - P_1}{Q_1^2}$$

donde ρ , es la densidad del aire y $\Omega = 2\omega \sin \varphi$ es la aceleración de Coriolis. Por el método de dimensiones se deduce para la fuerza tangencial la expresión $F = K^2 \rho \theta^2 / \left(\frac{V}{K \theta} \right)$ donde f representa una función potencial del número $\frac{V}{K \theta}$ que juega en la atmósfera igual papel que el de Reynolds en hidrodinámica, y θ es el gradiente vertical de temperatura potencial. Con 171 sondeos efectuados con globos pilotos en Barcelona por el «Servei Meteorològic de Catalunya» se hace una comprobación satisfactoria de la teoría que deja de ser válida para atmósferas isotermas; y se obtiene para F una expresión análoga a la de Poiseuille para el flujo laminar en líquidos, en la que entra como variable el gradiente vertical de temperatura. Se obtienen también los valores de H , A y K para diferentes gradientes verticales de temperatura.

Este trabajo fué comenzado en el Observatorio de Igueldo, donde quedaron, al tener que evacuar San Sebastián, en septiembre de 1936, como consecuencia de la invasión extranjera que padece España, gran número de datos de observación ya preparados para el cálculo, notas, libros y una extensa colección de monografías referentes al mismo tema. Convertido el Observatorio de Igueldo, instalado en Bilbao, en Servicio Meteorológico del País Vasco, el trabajo para el Ejército de la República absorbió todo el tiempo del que suscribe, lo que impidió continuarlo en aquellas difíciles circunstancias, a lo largo de la zona leal del Norte de España, donde la compañía del Prof. Domingo Quílez permitió madurar el estudio del tema. Establecido después en Valencia y por último en Barcelona, a su estímulo y consejo se debe la reanudación del trabajo. El Director del «Servei Meteorològic de Catalunya», Prof. D. Eduardo Fontserè, ha puesto a mi disposición la biblioteca del «Servei» y su archivo, así como algo que vale mucho más: su bondadoso interés por el resultado de la investigación y algunas sugerencias muy útiles. Por último, parte del trabajo se ha realizado en el Servicio Meteorológico Nacional, cuyo Jefe, Sr. Alonso, me ha permitido usar los medios de que dispone la Oficina Central para el cálculo y redacción definitiva.

A los tres doy públicamente las gracias por sus desinteresados consejos y ayuda.

Barcelona, julio 1938.

BIBLIOGRAFÍA

- AKERBLOM 1908 *Soc. Scient. Acta*, **VI**, vol. II, n.º 2.
- BARKAT ALI 1932 *Q. J. R. Meteor. Soc.*, **58**.
- BEST, 1935 *London, Meteor. Off. Geophys. Mem.* n.º 65.
- BJERKNES, (V. y J.), SOLBERG (H.) y BERGERON (T.) 1934 *Hydrodynamique Physique*, Paris.
- BROWN (J. C.) 1933 *Terr. Magn. Atm. Electr.*, **38**, p. 161.
- BRUNT (D.) 1920 *Q. J. P. Meteor. Soc.*, **46**.
- 1923 *A Dictionary of Applied Physics*. Londres.
- CAVE (C. J. P.) 1912 *The structure of the Atmosphere in clear weather*, Cambridge.
- DAVIES y SUTTON 1931 *Q. J. R. Meteor. Soc.*, **57**, p. 405.
- 1932 *Q. J. R. Meteor. Soc.*, **58**, p. 65.
- DOMINGO QUILEZ (J.) 1932 *Anales Soc. Esp. Fis. Quim.*, **30**, p. 492.
- DOPORTO (M.) 1936, a. *Anales Soc. Esp. Fis. Quim.*, **34**, p. 298.
- 1936, b. *Anales Soc. Esp. Fis. Quim.*, **34**, p. 304.
- EKMÁN 1905 *Arkiv f. Mat. Ast. och Fysik*, **2**, H. 1-2.
- GIBLETT (M. A.) 1932 *London, Meteor. Off. Geophys. Mem.* n.º 54.
- HELLMANN 1915 *M. Z.* **32**.
- HESELBERG y SVERDRUP 1916 *Beit. Phys. Atm.*, **7**, p. 16.
- HEYWOOD 1931 *Q. J. R. Meteor. Soc.*, **57**.
- LAMB (H.) 1924 *Hydrodynamics*. Londres.
- RICHARDSON 1922 *Weather Prediction by Numerical Process*. Cambridge.
- PRANDTL (L.) y TOLLMÉN (W.) 1924 *Z. Geoph.*, **1**.
- PRANDTL (L.) 1932 *Beit. Phys. Atm.*, **19**.
- ROSSBY (C. G.) y MONTGOMERY (R. B.) 1935 *Papers in Physical Oceanography and Met.*, **3**, n.º 3.
- SCRASE (F. J.) 1930 *London, Meteor. Off. Geophys. Mem.* n.º 52.
- SUTCLIFFE 1936 *Q. J. R. Meteor. Soc.*, **62**.
- SUTTON (O. G.) 1936 *Q. J. R. Meteor. Soc.*, **58**.
- 1932 *Q. J. R. Meteor. Soc.*, **62**.
- SVERDRUP (H. U.) 1936 *Geof. Publ.*, **11**, n.º 7.
- TAYLOR (G. I.) 1913 *Report of ss. Scotia to Board of Trade*. Londres.
- 1914 *Phil. Trans.*, **215**.
- 1916 *Proc. R. Soc., A*, **92**.
- 1917 *Proc. R. Soc., A*, **94**, p. 141.
- 1927 *Q. J. R. Meteor. Soc.*, **53**, p. 201.
- 1932 *Q. J. R. Meteor. Soc.*, **58**, p. 61.

M11.6(4
BARCEL
DO
A 1